目录

1 准备知识

1.1 Riemann 面

例子 1.1.1. *$\sqrt{z}$: 多值函数. $\sqrt{z}$ 的黎曼面.*

定义 1.1.1. 2 维连通流形 X, X 上一个坐标指一个同胚 $\varphi : U \subset X \to V \subset \mathbb{C}$.

定义 1.1.2. 称两个坐标 $\varphi_i : U_i \to V_i$, $i = 1, 2$ 是全纯相容的，若 $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ 双全纯.

定义 1.1.3. X 上一个复图表指一族全纯相容的坐标 $\mathscr{U} = \{\varphi_j : U_j \to V_j, j \in J\}$ 使得 $X = \bigcup\limits_j U_j$.

定义 1.1.4. X 上一个复结构 $\Sigma = [\mathscr{U}]$, $\mathscr{U} : X$ 上的复图表，$\mathscr{U} \sim \mathscr{U}'$ 等价于其中任意两个坐标全纯相容.

定义 1.1.5. (X, Σ) 称为一个 *Riemann 面.–H. Weyl.*

例子 1.1.2. *X: Riemann 面, $Y \subset X$ 开、连通，则 Y 也是 Riemann 面.*

设 $\mathscr{U}$ 是 X 上的一个开图表，则 $\mathscr{U}|_Y$ 也是 Y 的一个开图表.

例子 1.1.3. $\Omega \subset \mathbb{C}$ 中的区域均为 *Riemann* 面，取 $\mathscr{U} = \{\mathrm{id} : \Omega \to \Omega\}$.

例子 1.1.4. *Riemann* 球面 $\mathbb{P}^1$ 是（紧）*Riemann* 面.

$\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$，有球极投影 $\mathbb{P}^1 \cong \mathbb{S}^2$，故 $\mathbb{P}^1$ 是紧连通流形.

取 $U_1 = \mathbb{C}$, $U_2 = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$. 定义：$\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z$. $\varphi_2 : U_2 \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z}, \infty \mapsto 0$. $U_1 \cap U_2 = \mathbb{C}^*$. $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \varphi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^*$. $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, z \mapsto \frac{1}{z}$ 是双全纯. 故 $\mathscr{U} = \{\varphi_j : j = 1, 2\}$ 是 $\mathbb{P}^1$ 的一个复图表.

例子 1.1.5. 环面是 *Riemann* 面.

设 ω_1, ω_2 是 $\mathbb{R}$-线性无关的向量. 称 $\Gamma := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \{m\omega_1 + n\omega_2 : m, n \in \mathbb{Z}\}$ 是 $\mathbb{C}$ 中的一个格.

定义 $z \sim z'$ 等价于 $z - z' \in \Gamma$. 称 $\mathbb{C}/\Gamma := \mathbb{C}/\sim$ 为一个环面. 商映射 $\pi : z \mapsto [z]$ 给出了 $\mathbb{C}/\Gamma$ 上的一个拓扑，其是一个紧连通流形.

设 $V \subset \mathbb{C}$ 是一个区域，使得 V 中任何两个点不等价，则 $\pi : V \to U := \pi(V)$ 是一个同胚. 进而 $\varphi := \pi^{-1} : U \to V$ 是一个坐标.

设 $\varphi_i : U_i \to V_i$ 为坐标，$i = 1, 2$. 令 $\psi := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$.

因为 $\pi \circ \psi(z) = \varphi_1^{-1}(z) = \pi(z)$，所以有 $\psi(z) - z \in \Gamma$.

因为 $\psi(z) - z$ 连续，且取值在一个离散集上，所以 $\psi(z) - z$ 在 $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$ 的任何一个连通分支上均为常数. 因此 ψ 是双全纯函数. 覆盖是容易的.

例子 1.1.6. 设 $f \in C(\mathbb{C})$, 考虑 f 的图像 $\Gamma(f) := \{(z, f(z)) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : z \in \mathbb{C}\}$. 取

$$\mathscr{U} = \{P : \Gamma(f) \to \mathbb{C}, (z, f(z)) \mapsto z\},$$

推出 $\Gamma(f)$ 为 *Riemann* 面.

注 1.1.1. *Riemann* 面是由“同胚”来定义的，只是两个坐标的转换函数是双全纯的.

定理 1.1.1. *(Gauss* 证明实解析情形；*Korn-Lichtenstein* 证明一般情形*)*

任何一个可定向的光滑曲面，均存在一个复结构，使得其称为一个 *Riemann* 面.

参见 *Jost,* 紧 *Riemann* 面 *(*有关 *PDE).*

定义 1.1.6. X 是 *Riemann* 面，称函数 $f: X \to \mathbb{C}$ 为一个全纯函数，若对任意坐标 $\varphi: U \to V$，有 $f \circ \varphi^{-1}: V \to \mathbb{C}$ 全纯. 记 $\mathcal{O}(X)$ 为 X 上的全纯函数全体.

注 1.1.2. 使用 $\mathcal{O}$ 是为了纪念 *Oka.*

定理 1.1.2. *Riemann* 可去奇点定理.

X: *Riemann* 面，$U \subset X$ 是开集，$a \in U$. 若 $f \in \mathcal{O}(U \backslash \{a\}) \cap L^{\infty}(U)$, 则存在唯一的 $\tilde{f} \in \mathcal{O}(U)$ 使得 $\tilde{f}|_{U\backslash\{a\}} = f$. 利用平面区域的情形.

定义 1.1.7. X, Y: *Riemann* 面，$f \in C(X, Y)$. 称 f 是全纯的，若对所有的坐标 $\varphi_1: U_1 \subset X \to V_1$, $\varphi_2: U_2 \subset Y \to V_2$, 其中 $f(U_1) \subset U_2$, 有

$$\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}: V_1 \to V_2$$

全纯.

记 $\mathcal{O}(X, Y)$ 为 $X \to Y$ 的全纯映射全体.

注 1.1.3. 验证此处 $f \in C(X, Y)$ 不可少.

定义 1.1.8. 若 $f: X \to Y$ 同胚，且 f, f^{-1} 全纯，则称 f 为双全纯映射.

命题 1.1.1. 恒等原理.

$f_1, f_2 \in \mathcal{O}(X, Y)$, 记 $A := \{x \in X : f_1(x) = f_2(x)\}$. 若 A 有聚点，则 $f_1 \equiv f_2$.

证明. 令 $G := \{x \in X :$ 存在邻域 $W \ni x$, s.t. $f_1|_W = f_2|_W\}$. 则 G 是开集.

$G \subset X$ 闭：设 $b \in \partial G \cap X$，因为 f_i 连续，所以有 $f_1(b) = f_2(b)$.

取坐标 $\varphi: b \in U \subset X \to V$, $\psi: U' \subset Y \to V'$ 使得 $f_i(U) \subset U'$ 且 U 连通. 记 $g_i = \psi \circ f_i \circ \varphi^{-1}$. 由平面区域上的恒等原理，推出 $g_1 = g_2$ 在 V 上. 进而 $f_1 = f_2$ 在 U 上，故 $b \in G$. 所以 G 是闭集.

再由平面区域恒等原理，有聚点 $a \in G$.

因为 X 连通，非空，且既开又闭，故有 $G = X$. 进而 $f_1 \equiv f_2$.

定义 1.1.9. X: *Riemann* 面. X 上的一个亚纯函数 *(Meromorphic)* 指，$f \in \mathcal{O}(X')$，其中 $X' \subset X$ 开且使得

1. $X \backslash X'$ 离散. *2.* $\forall p \in X \backslash X'$ 为 f 的极点，即 $f(x) \to \infty (x \to p)$.

记 $\mathcal{M}(X)$ 为 X 上的亚纯函数全体.

例子 1.1.7. $p(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. $p(z) \to \infty (z \to \infty)$, 故 $p \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$.

定理 1.1.3. $f \in \mathcal{M}(X)$, 补充定义 f 在极点处取值为 ∞, 则 $f \in \mathcal{O}(X, \mathbb{P}^1)$. 反之，若 $f \in \mathcal{O}(X, \mathbb{P}^1)$, 则 $f \equiv \infty$ 或 $f \in \mathcal{M}(X)$.

证明. 设 $f\in\mathcal{M}(X)$, $f\neq\infty$, 则 $P=f^{-1}(\infty)$ 为离散的. 考虑坐标 $\varphi:U\subset X\to V$, $\psi:U'\subset\mathbb{P}^1\to V'$, 使得 $f(U)\subset U'$, 且 V' 有界.

在 U 中有限个极点，进而在 $\varphi(U)$ 上亦为有限个极点，而 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ 是有界的. 由 Riemann 可去奇点定理，使得 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\in\mathcal{O}(V)$, 进而 $f\in\mathcal{O}(X,\mathbb{P}^1)$.

定理 1.1.4. *全纯映射局部行为.*

$f\in\mathcal{O}(X,Y)$ 非常值，$a\in X$，$b:=f(a)\in Y$. 则存在 $k\in\mathbb{Z}^+$，以及坐标 $\varphi:U\subset X\to V$, $\psi:U'\subset Y\to V'$ 使得 $f(U)\subset U'$, $\varphi(a)=\psi(b)=0$ 且

$$F(z):=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(z)=z^k. \tag{1.1.1}$$

称 k 为 f 在 a 处的重数.

证明. 首先可取坐标 φ,ψ 使得其满足除了方程 (1.1.1) 以外的所有性质.

定义 $f_1:=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\in\mathcal{O}(V,V')$, 使得 $f_1(0)=0$ 且 f_1 不是常值. 进而 $f_1(z)=z^kg(z)$, 其中 $g\in\mathcal{O}(V)$, $g(0)\neq0$.

适当选取 U, 可使 V 单连通，且 $|g||_V>0$. 故存在 $g^{\frac{1}{k}}$ 的一个单值分支 h, 使得 $f_1(z)=(z\cdot h(z))^k$. $z\mapsto z\cdot h(z)$ 双全纯 (适当收缩 U).

记 $\alpha(z):=z\cdot h(z)$. 只需用 $\alpha\circ\varphi$ 来代替 φ 即可.

推论 1.1.1. *(开映射)$f\in\mathcal{O}(X,Y)$ 不是常值映射，则 f 是开映射.*

证明：对于任意 a, 任意邻域 U, 则 $f(U)$ 是 $f(a)$ 的一个邻域.

推论 1.1.2. *$f\in\mathcal{O}(X,Y)$ 且单，则 $f:X\to f(X)$ 双全纯.*

证明：f 单叶，则 f 在任何点的重数为 1，故 f^{-1} 全纯.

推论 1.1.3. *(最大模) $f\in\mathcal{O}(X)$ 非常值，则 f 不能在 X 内部取最大值.*

证明：假设存在 $a\in X$, 使得 $|f(a)|=R:=\sup\limits_X|f|$, 则 $f(X)\subset K:=\{z\in\mathbb{C}:|z|\leq R\}$. 因为 $f(X)$ 开，所以 $f(X)\subset\overset{\circ}{K}$，但 $f(a)\in\partial K$，矛盾.

定理 1.1.5. *X,Y: Riemann 面，X 紧，$f\in\mathcal{O}(X,Y)$ 非常值，则 f 满且 Y 紧.*

证明. $\varnothing\neq f(X)\subset Y$ 开, 且 $f(X)\subset Y$ 是紧集进而闭集. 又因为 Y 连通, 所以 $Y=f(X)$.

推论 1.1.4. *X 是紧 Riemann 面，$f\in\mathcal{O}(X)$, 则 f 是常数.*

推论 1.1.5. *$f\in\mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$ 非常值，则 f 是有理函数，即 $f=\frac{P_1}{P_2}$，其中 P_2,P_2 是多项式.*

证明. 因为 $\mathbb{P}^1$ 是紧的，且 $f^{-1}(\infty)$ 离散，所以 $f^{-1}(\infty)$ 有限. 不妨设 $f(\infty)\neq\infty$(否则用 $\frac{1}{f}$ 来代替 f). 进而 $f^{-1}(\infty)=\{a_1,\cdots,a_n\}\subset\mathbb{C}$.

令 h_ν 为 f 在 a_ν 处的主部，则 $g:=f-\sum\limits_{\nu=1}^{n}h_\nu\in\mathcal{O}(\mathbb{P}^1)$，进而 g 是常数.

推论 1.1.6. *Liouville 定理: $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ 且有界，则 f 是常数.*

证明. 由 Riemann 可去奇点定理，有 $f\in\mathcal{O}(\mathbb{P}^1)$. 又因为 $\mathbb{P}^1$ 紧，故 f 是常数.

推论 1.1.7. *代数学基本定理: $p(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$, 则 $p(z)=0$ 至少有一个复根.*

证明. $p \in \mathcal{O}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^1)$, $f^{-1}(\infty) = \{\infty\}$. p 非常值，所以 p 是满射，进而 $p^{-1}(0) \cap \mathbb{C} \neq \varnothing$.

注 1.1.4. *Gauss* 是第一个定义复数的数学家：复整数.

定义 1.1.10. 双周期函数.

设 $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \in \mathbb{C}$ 为一个格，称 $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ 为 Γ-双周期的，若

$$f(z) = f(z + \omega_i), \ \forall z \in \mathbb{C}.\ i = 1, 2$$

$$\iff f(z) = f(z + \omega), \ \forall z \in \mathbb{C}, \ \omega \in \Gamma.$$

若 f 是 Γ-双周期函数，则其诱导出 $F \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Gamma)$ 使得 $f = F \circ \pi$. 反之，若 $F \in \mathcal{M}(\mathbb{C} \backslash \Gamma)$，则 $f = F \circ \pi$ 是 Γ-双周期的.

定理 1.1.6. 两个定理：

1. $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ 为 Γ-双周期，则 f 是常数.

2. $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ 为 Γ-双周期，且 f 不是常数，则 $f(\mathbb{C}) = \mathbb{P}^1$.

例子 1.1.8. *Weierstrass* $\mathcal{P}$-函数.

$$\mathcal{P}(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Gamma \backslash \{0\}} [\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}]$$

为 Γ-双周期的.

注 1.1.5. 可证明：$F : \mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{P}^2$，$[z] \mapsto [1 : \mathcal{P}(z) : \mathcal{P}'(z)]$ 为一个全纯嵌入（进而推出 $\mathbb{C}/\Gamma$ 为代数曲线，一维流形）

1.2 Riemann 面上的微积分

定义 1.2.1. 设 U 是 $\mathbb{C}$ 中的一个开集，令 $z=x+iy$，$\overline{z}=x-iy$，定义 $\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y})$，$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y})$，$f\in\mathcal{O}(U)$ 等价于 $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0$.

利用 $dx=\frac{1}{2}(dz+d\overline{z})$，$dy=\frac{1}{2i}(dz-d\overline{z})$. 则 U 上的任意一个可微 *1*-形式 $fdx+gdy$ 写为 $\varphi dz+\psi d\overline{z}$.

X 是 *Riemann* 面，称 f 为 X 上的一个可微函数，即 $f\in\mathcal{E}(X)$，若对任意坐标 $z:U\subset X\to V\subset\mathbb{C}$，存在 $\tilde{f}\in\mathcal{E}(V)$ 使得 $f=\tilde{f}\circ z$.

定义 1.2.2. 设 $\mathscr{U}=\{(U,z_U)\}$ 为 X 上一个复图表. 若存在 $f_U,g_U\in\mathcal{E}(U)$，使得当 $U\cap U'\neq\varnothing$ 时，有

$$f_U dz_U+g_U d\overline{z_U}=f_{U'}dz_{U'}+g_{U'}d\overline{z_{U'}}$$

在 $U\cap U'$ 上成立，则称 $\omega|_U:=f_U dz_U+g_U d\overline{z_U}$ 为 X 上的一个可微 *1*-形式. 记 $\mathcal{E}^1(X)$ 是 X 上可微 *1*-形式全体.

若 $g_U\equiv 0,\forall U$*(resp.* $f_U\equiv 0,\forall U$*)*，则称 ω 为一个可微 $(1,0)$ 形式 *(resp. (0,1) 形式)*，其全体分别记为 $\mathcal{E}^{(1,0)}(X)$*(resp.* $\mathcal{E}^{(0,1)}(X)$*)*.

例子 1.2.1. $f\in\mathcal{E}(X)$，

$$df|_U:=\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}d\overline{z}\in\mathcal{E}^1(X),$$

$$d'f|_U:=\frac{\partial f}{\partial z}dz\in\mathcal{E}^{(1,0)}(X),$$

$$d''f|_U:=\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}d\overline{z}\in\mathcal{E}^{(0,1)}(X).$$

$d=d'+d''$. $f\in\mathcal{O}(X)\iff d''f=0$*(Cauchy-Riemann)*.

($d''u=v$*，非齐次 C-R 方程)*

定义 1.2.3. $\Omega(X)$ 为 X 上全纯 *1*-形式全体，即 $\omega\in\mathcal{E}^{(1,0)}(X)$ 且局部可表示为 $\omega=fdz$，$f\in\mathcal{O}(X)$.

定义 1.2.4. 设 $a\in X$，$\omega\in\Omega(X\backslash\{a\})$. 取坐标 (U,z) 使得 $z(a)=0$. $\omega:=f(z)dz$，$f\in\mathcal{O}(U\backslash\{a\})$. 定义 ω 在 a 处的留数 *(Residue)* 为

$$\operatorname{Res}_a\omega:=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\varepsilon}f(z)dz=c_{-1},\ \varepsilon<<1.$$

其中 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n z^n$.

引理 1.2.1. 留数不依赖于复坐标的选取.

证明. 设 (U',z') 为另一个复坐标，使得 $z'(a)=0,\omega|_{U'}=g(z')dz'$. 当 $\varepsilon<<1$ 时，坐标变换 $z'\mapsto z$，将 $\{|z'|<\varepsilon\}$ 映射为一个光滑 Jordan 区域 D_ε 使得 $0\in D_\varepsilon$. 取 $\varepsilon'<<\varepsilon$ 使得 $\{|z|<\varepsilon'\}\subset D_\varepsilon$，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z'|=\varepsilon}g(z')dz'=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_\varepsilon}f(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\varepsilon'}f(z)dz.$$

定义 1.2.5. *X 上一个 1-形式 ω 称为亚纯 1-形式, 若 $\omega \in \Omega(X')$, 其中 $X' \subset X$ 开, $X \backslash X'$ 离散且 $\forall a \in X \backslash X'$ 为 ω 的极点.*

记 $\mathcal{M}^1(X)$ 为 X 上亚纯 1-形式全体，也称为 Abel 微分全体.

Abel 微分的分类 (Riemann):

1. 全纯 1-形式. 2. $\forall a \in X \backslash X'$, $Res_a \omega = 0$. 3. 其余.

定义 1.2.6. *类似于 1-形式，我们可以定义 2-形式，使得局部地，$\omega = f(z)dz \wedge d\overline{z}$. 我们记 $\mathcal{E}^2(X)$ 为 X 上可微 2-形式全体.*

定义 1.2.7. *定义 $d : \mathcal{E}^1 \to \mathcal{E}^2$, $\omega = fdz + gd\overline{z} \mapsto d\omega := df \wedge dz + dg \wedge d\overline{z}$.*

同样可以定义 d', d'', 且有 $d = d' + d''$.

命题 1.2.1. *一些性质*

1. *$d^2 f = d'^2 f = d''^2 f = 0$. 推出 $0 = d^2 = (d' + d'')^2 = d'^2 + d'd'' + d''d' + d''^2$ 即 $d'd'' = -d''d'$.*

2. *$f \in \mathcal{E}(X)$, $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$, 则 $d(f \cdot \omega) = df \wedge \omega + f \cdot d\omega$. 同样对 d', d'' 成立.*

   特别地，$\forall f \in \mathcal{E}(X)$，$d'd''f = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} dz \wedge d\overline{z}$，则称 f 在 X 上调和若 $d'd''f = 0$. (解 $d'd''u = v$.)

3. *$\mathcal{E}^{(1,0)} \cap \operatorname{Ker} d = \Omega$.*

定义 1.2.8. *X, Y 是 Riemann 面，$F \in \mathcal{O}(X, Y)$，定义拉回 (pull-back):*

$\omega = fdz + gd\overline{z}$, $F^*\omega := F^*(f)dF + F^*(g)d\overline{F}$, 其中 $F^*(f) = f \circ F$.

$\omega = fdz \wedge d\overline{z}$, $F^*\omega = F^*(f)dF \wedge d\overline{F}$.

命题 1.2.2. *F^* 与 d 交换，即 $dF^* = F^* \circ d$，对 d', d'' 也成立.*

推论 1.2.1. *若 f 在 Y 上调和，则 $F^*(f)$ 在 X 上调和.*

定义 1.2.9. *积分.*

X 是 Riemann 面，c 为 X 上的分段光滑曲线，i.e. 存在连续映射 $c : [0, 1] \to X$，取分划 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$, 坐标 (U_k, z_k) 使得 $c([t_{k-1}, t_k]) \subset U_k$ 且 $x_k \circ c, y_k \circ c \in C^1([t_{k-1}, t_k])$.

设 $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$ 使得 $\omega|_{U_k} = f_k dz_k + g_k d\overline{z_k}$. 定义 ω 在 c 上的积分为

$$\int_c \omega := \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (f_k \circ c \frac{d(z_k \circ c)}{dt} + g_k \circ c \frac{d(\overline{z}_k \circ c)}{dt}) dt.$$

定理 1.2.1. *Newton–Lebniz.*

$F \in \mathcal{E}(X)$，则 $\int_c dF = F \circ c|_0^1$.

定义 1.2.10. 设 U 是复平面中的一个区域，$\omega \in \mathcal{E}^2(U)$, $\omega = fdx \wedge dy = f \circ \frac{i}{2} dz \wedge d\overline{z}$. 设 $\operatorname{supp} \omega \subset U$, 定义

$$\int_U \omega := \int_U f dx \wedge dy = \frac{i}{2} \int_U f dz \wedge d\overline{z}.$$

若 $\varphi : V \to U$ 是双全纯映射, $\varphi(s) = z$.

$$\int_U \omega = \frac{i}{2} \int_U f dz \wedge d\overline{z} = \frac{i}{2} \int_V f \circ \varphi |\varphi'|^2 ds \wedge d\overline{s} = \int_V \varphi^* \omega.$$

定义 1.2.11. X 是 *Riemann* 面，$\varphi : U \to V$ 是坐标，$\omega \in \mathcal{E}^2(X)$，且 $\operatorname{supp}\omega \subset U$(推出 $(\varphi^{-1})^*\omega$ 的支集在 V 中)，则定义

$$\int_X \omega = \int_U \omega := \int_V (\varphi^{-1})^*\omega.$$

定义与坐标选取无关.

定义 1.2.12. 设 X 是仿紧的 *Riemann* 面，则可选取坐标 $\varphi_k : U_k \to V_k$, $k \in \mathbb{Z}^+$，使得 $X = \bigcup\limits_k U_k$，且每个 U_k 至多与其它有限个 U_j 相交非空.

取 $\{\chi_k\}$ 为从属于覆盖 $\{U_k\}$ 的单位分解，*i.e.* $\chi_k \in C_0^\infty(U_k)$, 且 $\sum\limits_k \chi_k = 1$. 则若 $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$，则定义

$$\int_X \omega := \sum_k \int_X (\chi_k \cdot \omega).$$

定理 1.2.2. 留数定理.

设 X 是紧 *Riemann* 面，$a_1, \cdots, a_n \in X$，推出 $\forall \omega \in \Omega(X \backslash \{a_1, \cdots, a_n\})$ 有

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{a_k} \omega = 0.$$

引理 1.2.2. $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$ 且具有紧支集，则 $\int_X d\omega = 0$.

证明. 留数定理的证明.

取坐标 (U_k, z_k), 使得 $z_k(a_k) = 0$ 且 $U_k \cap U_j = \varnothing, \forall j \neq k$，$z_k(U_k) \subset \mathbb{C}$ 是一个圆盘.

令 $X' = X \backslash \{a_1, \cdots, a_n\}$. 取 $\chi_k \in C_0^\infty(U_k)$ 使得 $\chi_k = 1$ 在 a_k 上的一个邻域. 令 $g := 1 - \sum\limits_{k=1}^n \chi_k$，则 $g \in \mathcal{E}(X)$ 且 g 在 a_k 的某个邻域取值为 0，故 $g \cdot \omega \in \mathcal{E}^1(X)$.

$$0 = \int_X d(g \cdot \omega) = \int_{X'} d(g \cdot \omega) = \int_{X'} d\omega - \sum_{k=1}^n \int_{X'} d(\chi_k \cdot \omega)$$

$$\begin{aligned} \int_{X'} d(\chi_k \omega) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{X \backslash \{|z_k| \le \varepsilon\}} d(\chi_k \omega) \\ &= -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|z_k| = \varepsilon} \chi_k \omega \\ &= -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|z_k| = \varepsilon} \omega \\ &= -2\pi i \operatorname{Res}_{a_k} \omega. \end{aligned}$$

推论 1.2.2. X 是紧的 *Riemann* 曲面，$f \in \mathcal{M}(X)$ 且非常数，则 $\#f^{-1}(0) = \#f^{-1}(\infty)$，这里计重数在内.

证明. 令 $\omega := \frac{df}{f} \in \Omega(X \backslash (f^{-1}(0) \cup f^{-1}(\infty)))$. 设 $a \in f^{-1}(0)$，其阶为 m. 取坐标 (U, z) 使得 $z(a) = 0$，则 $f(z) = z^m g(z)$，其中 $g \in \mathcal{O}(U)$ 且 $g(0) \neq 0$.

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = (\log f(z))' = (m \log z + \log g(z))' = \frac{m}{z} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

推出 $\operatorname{Res}_a \omega = m$.

同理，若 b 是 ω 的 $-m$ 阶极点，则 $\operatorname{Res}_b \omega = -m$. 应用留数定理即得.

引理 1.2.3. *Poincaré 引理.*

设 $U := \{z : |z| < R\}$, $0 < R \leq \infty$. $\omega \in \mathcal{E}^1(U)$ 且 $d\omega = 0$，则存在 $F \in \mathcal{E}(U)$ 使得 $dF = \omega$.

证明. 设 $\omega = fdx + gdy$，$d\omega = df \wedge dx + dg \wedge dy = (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})dx \wedge dy$，故 $d\omega = 0$ 等价于 $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$.

令 $F(x, y) := \int_0^1 [f(tx, ty)x + g(tx, ty)y]dt$. 则有

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= \int_0^1 [f(tx, ty) + \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty)tx + \frac{\partial g}{\partial x}(tx, ty)ty]dt \\ &= \int_0^1 [f(tx, ty) + \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty)tx + \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)ty]dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}[tf(tx, ty)]dt = tf(tx, ty)|_0^1 = f(x, y).\end{aligned}$$

同理 $\frac{\partial F}{\partial y} = g$，证毕.

引理 1.2.4. *Dolbeault 引理 (Grothendieck).*

设 $\omega \in \mathcal{E}^{(0,1)}(U)$，则存在 $f \in \mathcal{E}(U)$ 使得 $d''f = \omega$.

命题 1.2.3. 设 $g \in C_0^\infty(\mathbb{C})$，则存在 $f \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$ 使得 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$.

证明. 令 $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{g(\zeta)d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - z}$. 令 $\zeta = z + re^{i\theta}$，$dx \wedge dy = \frac{i}{2} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$, 则

$$d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = -2idx \wedge dy = -2irdr \wedge d\theta,$$

推出

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} g(z + re^{i\theta})e^{-i\theta} dr \wedge d\theta,$$

进而 $f \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$ 且

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z + re^{i\theta})e^{-i\theta} dr \wedge d\theta$$

令 $\zeta = re^{i\theta}$，原式化为

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} [\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z + \zeta)/\zeta] d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

当 $\zeta \neq 0$ 时

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z + \zeta)/\zeta = \frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}}(z + \zeta)/\zeta = \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}(g(z + \zeta)/\zeta),$$

推出

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| \geq \varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}(\frac{g(z + \zeta)}{\zeta}) d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| \geq \varepsilon} d(-\frac{g(z + \zeta)}{\zeta} d\zeta) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = \varepsilon} \frac{g(z + \zeta)}{\zeta} d\zeta \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta = g(z).\end{aligned}$$

证明. 逐次逼近法证明 Dolbeault 引理.

取 R_n 从小严格逼近 R. 令 $U_n := \{z : |z| < R_n\}$，则 $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \cdots$(严格包含) 且 $U = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$. 取 $x_n \in C_0^{\infty}(U_{n+1})$ 且 $x_n|_{U_n} = 1$.

设 $\omega = g d\bar{z}$，由命题推出对于任意 $n \in \mathbb{Z}^+$，存在 $f_n \in \mathcal{E}(U)$ 使得 $\frac{\partial f_n}{\partial \bar{z}} = x_n \cdot g$.

我们归纳地构造一列 $\tilde{f}_n \in \mathcal{E}(U)$ 使得

1. $\frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial \bar{z}} = g$ 于 U_n.
2. $\|\tilde{f}_{n+1} - \tilde{f}_n\|_{L^{\infty}(U_{n-1})} \leq 2^{-n}$.

取 $\tilde{f}_1 := f_1$，则其满足 1.

假设 $\tilde{f}_1, \cdots, \tilde{f}_n$ 已构造，则在 U_n 上有 $\frac{\partial (f_{n+1} - \tilde{f}_n)}{\partial \bar{z}} = g - g = 0$，故 $f_{n+1} - \tilde{f}_n \in \mathcal{O}(U_n)$. 因此存在多项式 P_n 使得 $\|f_{n+1} - \tilde{f}_n - P_n\|_{L^{\infty}(U_{n-1})} \leq 2^{-n}$，只需取 $\tilde{f}_{n+1} := f_{n+1} - P_n$.

对于任意正整数 n，任意 $k > l > n$

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{f}_k - \tilde{f}_l\|_{L^{\infty}(U_{n-1})} &\leq \sum_{j=l}^{k-1} \|\tilde{f}_{j+1} - \tilde{f}_j\|_{L^{\infty}(U_{n-1})} \\
&\leq \sum_{j=l}^{k-1} 2^{-j} \leq 2^{-n+1}
\end{aligned}
$$

说明 $\{\tilde{f}_n\}$ 在 U 上内闭匀敛于某个 $f \in C(U)$.

因为在每个 U_n 上有 $f = \tilde{f}_n + \sum\limits_{k=n}^{\infty} (\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k)$，又因为 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k) = g - g = 0$ 于 U_n，即 $\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k \in \mathcal{O}(U_n)$ 且 $\sum\limits_{k=n}^{\infty} (\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k)$ 一致收敛.

进而 $f = \tilde{f}_n +$ 全纯函数 于 U_n. 进而 $f \in \mathcal{E}(U_n)$ 且 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial \bar{z}} = g$ 于 U_n. 由 n 的任意性即得.

推论 1.2.3. *对于 U 上任意可微函数 g，存在可微函数 f 使得 $g = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}$.*

证明. 存在可微函数 f_1 使得 $\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}} = g$. 又存在可微函数 f_2 使得 $\overline{f}_1 = \frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}}$ 进而 $\frac{\partial \overline{f}_2}{\partial z} = f_1$. 取 $f = \overline{f}_2$ 即可.

1.3 层 (Sheaf)

定义 1.3.1. X 是拓扑空间，$\mathscr{T}$ 是 X 上的开集全体. 关于 X 上的一个预层是指一对 $(\mathscr{F},\rho)$ 使得

1. $\forall U\in\mathscr{T}$，$\mathscr{F}(U)$ 均为 *Abel* 群，且 $\mathscr{F}=\{\mathscr{F}(U):U\in\mathscr{T}\}$.
2. $\rho=\{\rho_V^U:V\subset U,V,U\in\mathscr{T}\}$ 其中 ρ_V^U 为 $\mathscr{F}(U)$ 到 $\mathscr{F}(V)$ 的群同态使得
   (a) $\rho_U^U=\mathrm{id}_{\mathscr{F}(U)}$.
   (b) $\rho_W^V\circ\rho_V^U=\rho_W^U$, 对于任意开集 $W\subset V\subset U$.

通常记 $(\mathscr{F},\rho)$ 为 $\mathscr{F}$. $\rho_V^U(f):=f|_V$ 是限制映射.

例子 1.3.1. X 拓扑空间，$U\in\mathscr{T}$，记 $\mathcal{C}(U)$ 为 U 上的连续函数全体，ρ_V^U 是通常意义下的限制映射. 则诱导出预层 $\mathcal{C}$.

定义 1.3.2. 设 $\mathscr{F}$ 是 X 上的一个预层. 若对于任意开集 U，对任意 $U_\alpha\in\mathscr{T}$ 使得 $U:=\bigcup_\alpha U_\alpha$，有

1. $f,g\in\mathscr{F}(U)$ 使得 $f|_{U_\alpha}=g|_{U_\alpha}$，对于任意 α，则 $f\equiv g$.
2. 拼接原理. 设 $f_i\in\mathscr{F}(U_i)$. 若 $f_i|_{U_i\cap U_j}=f_j|_{U_i\cap U_j}$, 则 $f|_{U_i}:=f_i\in\mathscr{F}(U)$.

则称 $\mathscr{F}$ 为 X 上的一个层.

例子 1.3.2. X 是 *Riemann* 面，

(1) $\mathcal{C}$ 是一个层，类似地有 $\mathcal{E}$，$\mathcal{E}^{(1,0)}$ 和 $\mathcal{E}^{(0,1)}$ 是层.

(2) 对于 $U\in\mathscr{T}$，有层 $\mathcal{O}$. 类似地有 $\mathcal{M}$, Ω(全纯 1-形式), $\mathcal{M}^1$(亚纯 1-形式).

(3) $\mathcal{O}^*=\mathcal{O}(U,\mathbb{C}^*)$, $U\in\mathscr{T}$，则可诱导层 $\mathcal{O}^*$，类似可定义 $\mathcal{M}^*$.

例子 1.3.3. 存在预层但不是层.

设 X 是拓扑空间, $G=\mathbb{Z}$. 取 X 上的预层如下, 对于任意非空开集 U, 令 $\mathscr{G}(U)=G$, $\mathscr{G}(\varnothing)=0$. 定义 $\rho_V^U=\begin{cases}\mathrm{id}_G, & V\neq\varnothing\\ 0, & V=\varnothing\end{cases}$. 这是一个预层.

设 X 上至少有两个不相交的非空开集 U_1,U_2. 取 $g_1\equiv 1\in\mathscr{G}(U_1)$, $g_2\equiv -1\in\mathscr{G}(U_2)$. 因为 $U\cap V=\varnothing$, 故 $g_1|_{U_1\cap U_2}=0=g_2|_{U_1\cap U_2}$. 但不存在 $g\in\mathscr{G}(U_1\cup U_2)$ 使得 $g|_{U_1}=g_1$, $g|_{U_2}=g_2$，所以 $\mathscr{G}$ 不是层.

定义 1.3.3. 设 $\mathscr{F}$ 是 X 上的预层，$a\in X$，在不相交并 $\bigcup\limits_{\mathscr{T}\ni U\ni a}U$ 中引入等价关系 $\sim_a$ 如下:

设 $f\in\mathscr{F}(U)$, $g\in\mathscr{F}(V)$, $U,V\in\mathscr{T}$, $a\in U\cap V$, 定义 $f\sim_a g$ 等价于存在邻域 $a\in W\subset U\cap V$ 使得 $f|_W=g|_W$. 称 $\mathscr{F}_a:=\bigcup_{\mathscr{T}\ni U\ni a}\mathscr{F}(U)/\sim_a$ 为 $\mathscr{F}$ 在 a 处的茎 (*stalk*).

设 $\mathscr{T}\ni U\ni a$，定义 $\rho_a:\mathscr{F}(U)\to\mathscr{F}_a$, $f\mapsto[f]$. 称 $\rho_a(f)$ 为 f 在 a 处的芽 (*germ*).

例子 1.3.4. $X\subset\mathbb{C}$ 区域，$a\in X$. $\mathcal{O}_a:=\{[f]:f$ 在 a 的某个邻域上全纯 $\}$.

考虑 *Taylor* 展开，$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$，则 $f\sim_a g$ 等价于 f,g 在 a 处有相同的 *Taylor* 展开. 这表明 $\mathcal{O}_a\cong\mathbb{C}\{z-a\}$: 关于 $z-a$ 的收敛级数组成的环.

定义 1.3.4. 令 $|\mathscr{F}| := \bigcup\limits_{a\in X} \mathscr{F}_a$, 投射 $P : |\mathscr{F}| \to X$ 由 $\varphi \in \mathscr{F}_\alpha \mapsto \alpha$ 给出. 引入 $|\mathscr{F}|$ 的拓扑如下:

$U \in \mathscr{T}$, $f \in \mathscr{F}(U)$, 令 $[U, f] := \{\rho_\alpha(f) : \alpha \in U\} \subset |\mathscr{F}|$.

定理 1.3.1. $\mathscr{B} := \{[U, f] : U \in \mathscr{T}, f \in \mathscr{F}(U)\}$ 为 $|\mathscr{F}|$ 的拓扑基, 且 $P : |\mathscr{F}| \to X$ 为局部同胚.

证明. 先证明 $\mathscr{B}$ 是拓扑基, 即证明:

1. 对于任意点 $\varphi \in |\mathscr{F}|$, 存在 $[U, f] \ni \varphi$.

2. 对于任意点 $\varphi \in [U, f] \cap [V, g]$, 则存在 $[W, h] \subset [U, f] \cap [V, g]$ 使得 $\varphi \in [W, h]$.

设 $P(\varphi) = x$, $x \in U \cap V$, 则 $\varphi = \rho_x(f) = \rho_x(g)$, 进而存在邻域 $x \in W \subset U \cap V$ 使得 $f|_W = g|_W =: h$. 则 $\varphi \in [W, h] \subset [U, f] \cap [V, g]$.

然后证明 P 是局部同胚.

设 $\varphi \in |\mathscr{F}|$, $P(\varphi) = x$, 则存在 $[U, f] \ni \varphi$, $U \ni x$, $P : [U, f] \to U$ 为双射, 连续, 开映射, 进而 P 是局部同胚.

定义 1.3.5. 设 $\mathscr{F}$ 是 X 上的预层, 称 $\mathscr{F}$ 满足恒等原理若对于任意区域 $Y \subset X$, 若 $f, g \in \mathscr{F}(Y)$ 使得 $\rho_a(f) = \rho_a(g)$ 在某点 $a \in Y$ 成立, 则 $f \equiv g$.

例子 1.3.5. $\mathcal{O}, \Omega$ 满足恒等原理, $\mathcal{E}, \mathcal{E}^1$ 不满足恒等原理.

定理 1.3.2. X 局部连通, *Hausdorff*. 设 $\mathscr{F}$ 是 X 上的预层且满足恒等原理, 则 $|\mathscr{F}|$ 也是 *Hausdorff* 空间.

证明. 需证明, 对于任意 $\varphi_1 \neq \varphi_2$, $\varphi_1, \varphi_2 \in |\mathscr{F}|$, 存在不相交的开集分离 φ_1 和 φ_2.

(i) $P(\varphi_1) = x \neq y = P(\varphi_2)$.

取开集 $U \ni x$, $V \ni y$ 使得 $U \cap V = \varnothing$. 则 $P^{-1}(U) \ni \varphi_1$, $P^{-1}(V) \ni \varphi_2$ 开且 $P^{-1}(U) \cap P^{-1}(V) = \varnothing$.

(ii) $P(\varphi_1) = x = P(\varphi_2)$.

设 $\varphi_1 \in [U_1, f_1]$, $\varphi_2 \in [U_2, f_2]$, $x \in U_1 \cap U_2$. 设区域 $x \in U \subset U_1 \cap U_2$. 则 $\varphi_1 \in [U, f_1|_U]$, $\varphi_2 \in [U, f_2|_U]$. 下证 $[U, f_1|_U] \cap [U, f_2|_U] = \varnothing$.

假设存在 $\psi \in [U, f_1|_U] \cap [U, f_2|_U]$, 设 $P(\psi) = y$, 则 $\psi = \rho_y(f_1) = \rho_y(f_2)$, 由恒等原理 $f_1 \equiv f_2$ 于 U, 进而 $\varphi_1 = \varphi_2$ 一个矛盾.

引理 1.3.1. $\mathscr{F}$ 是层, $U \subset X$ 开集, $f \in \mathscr{F}(U)$, 则 $f = 0$ 等价于 $\rho_x(f) = 0, \forall x \in U$.

证明. $\forall x \in U$, 存在邻域 $x \in U_x \subset U$ 使得 $f|_{U_x} = 0$. 因为 $U = \bigcup\limits_{x\in U} U_x$, 由层的性质, $f = 0$ 于 U.

注 1.3.1. 约定 $\#\mathscr{F}(\varnothing) = 1$(层的定义中).

考虑 $\mathcal{C}$, 设 U_1, U_2 是 X 中的非空开集, 使得 $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. 设 f_1, f_2 分别是 U_1, U_2 上的连续函数. 总希望 $f = \begin{cases} f_1, & on\ U_1 \\ f_2, & on\ U_2 \end{cases} \in \mathcal{C}(U_1 \cup U_2)$.

由于 $\rho_\varnothing^{U_1} \circ \rho_{U_1}^{U_1\cup U_2}(f) = \rho_\varnothing^{U_1\cup U_2}(f) = \rho_\varnothing^{U_2}\rho_{U_2}^{U_1\cup U_2}(f)$, 则 $\rho_\varnothing^{U_1}(f_1) = \rho_\varnothing^{U_2}(f_2)$. 因此约定 $\#\mathscr{F}(\varnothing) = 1$ 是合理的.

1.4 上同调群

定义 1.4.1. 设 X 是拓扑空间，$\mathscr{F}$ 是 X 上的一个层. 设 $\mathscr{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ 是 X 的一个开覆盖. 整数 $q\geq 0$，定义相应于 $\mathscr{U}$ 的 $\mathscr{F}$ 的 q-阶上链群为

$$C^q(\mathscr{U},\mathscr{F})=\prod_{i_j\in I}\mathscr{F}(U_{i_0}\cap U_{i_1}\cap\cdots\cap U_{i_q}),$$

其中 $C^q(\mathscr{U},\mathscr{F})$ 中任意元素 (q-上链) 可表示为 $(f_{i_0\ldots i_q})_{i_j\in I}$，其中 $f_{i_0\ldots i_q}\in\mathscr{F}(U_{i_0}\cdots U_{i_q})$.

定义 1.4.2. 定义上边缘算子 $\delta: C^k(\mathscr{U},\mathscr{F})\to C^{k+1}(\mathscr{U},\mathscr{F})$.

若 $(f_i)_{i\in I}\in C^0(\mathscr{U},\mathscr{F})$，则定义

$$\delta((f_i)_{i\in I})=(g_{ij})_{i,j\in I},$$

其中 $g_{ij}=f_i-f_j\in\mathscr{F}(U_i\cap U_j)$.

若 $(f_{ij})_{i,j\in I}\in C^1(\mathscr{U},\mathscr{F})$，则定义

$$\delta((f_{ij})_{i,j\in I})=(g_{ijk})_{i,j,k\in I},$$

其中 $g_{ijk}=f_{ij}+f_{jk}-f_{ik}\in\mathscr{F}(U_i\cap U_j\cap U_k)$.

定义 1.4.3.

$$Z^1(\mathscr{U},\mathscr{F}):=\mathrm{Ker}(\delta: C^1(\mathscr{U},\mathscr{F})\to C^2(\mathscr{U},\mathscr{F})),$$
$$B^1(\mathscr{U},\mathscr{F}):=\mathrm{Im}(\delta: C^0(\mathscr{U},\mathscr{F})\to C^1(\mathscr{U},\mathscr{F})),$$

记 $Z^1(\mathscr{U},\mathscr{F})$ 是一阶闭上链群，$B^1(\mathscr{U},\mathscr{F})$ 是一阶上边缘群.

$(f_{ij})\in Z^1(\mathscr{U},\mathscr{F})$ 等价于 $f_{ij}+f_{jk}=f_{ik}$ 于 $U_i\cap U_j\cap U_k$. 特别地，$f_{ii}=0$, $f_{ij}=-f_{ji}$.

若 $(f_{ij})\in B^1(\mathscr{U},\mathscr{F})$，则 $(f_i)\in C^0(\mathscr{U},\mathscr{F})$ 使得 $f_{ij}=\delta((f_i))=f_i-f_j$，因此 $B^1(\mathscr{U},\mathscr{F})\subset Z^1(\mathscr{U},\mathscr{F})$.

称商群 $H^1(\mathscr{U},\mathscr{F}):=Z^1(\mathscr{U},\mathscr{F})/B^1(\mathscr{U},\mathscr{F})$ 为相应于 $\mathscr{U}$ 的系数在 $\mathscr{F}$ 中的一阶上同调群.

为了得到仅依赖于 $X,\mathscr{F}$ 的一个上同调群，须引入加细覆盖的概念.

定义 1.4.4. 称 X 的开覆盖 $\mathscr{V}=\{V_k\}_{k\in K}$ 为 $\mathscr{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ 的一个加细，记为 $\mathscr{V}<\mathscr{U}$，若对于任意 $k\in K$，存在 $i\in I$ 使得 $V_k\subset U_i$.

则存在加细映射 $\tau: K\to I$ 使得 $V_k\subset U_{\tau(k)}$.

定义 1.4.5. 定义

$$\tau^{\mathscr{U}}_{\mathscr{B}}: Z^1(\mathscr{U},\mathscr{F})\to Z^1(\mathscr{V},\mathscr{F})$$
$$(f_{ij})\mapsto(g_{kl}=f_{\tau(k),\tau(l)}|_{V_k\cap V_l}).$$

有 $g_{kl}+g_{lm}=g_{km}$ 于 $V_k\cap V_l\cap V_m$，故其良定. 且有 $\tau^{\mathscr{U}}_{\mathscr{V}}: B^1(\mathscr{U},\mathscr{F})\to B^1(\mathscr{V},\mathscr{F})$，则其诱导出映射

$$\tau^{\mathscr{V}}_{\mathscr{U}}: H^1(\mathscr{U},\mathscr{F})\to H^1(\mathscr{V},\mathscr{F}).$$

引理 1.4.1. $\tau_{\mathscr{V}}^{\mathscr{U}}: H^1(\mathscr{U},\mathscr{F}) \to H^1(\mathscr{V},\mathscr{F})$ 不依赖于加细映射的选取.

证明. 设 $\tilde{\tau}: K \to I$ 是另一个加细映射. 设 $(f_{ij}) \in Z^1(\mathscr{U},\mathscr{F})$，有 g_{kl} 与 $\tilde{g}_{kl}$，需证明 $(g_{kl}) \sim (\tilde{g}_{kl})$.

因为 $V_k \subset U_{\tau(k)} \cap U_{\tilde{\tau}(k)}$，则可定义 $h_k := f_{\tau(k),\tilde{\tau}(k)}|_{V_k} \in \mathscr{F}(V_k)$.

在 $V_k \cap V_l$ 上，

$$\begin{aligned}
g_{kl} - \tilde{g}_{kl} &= f_{\tau(k),\tau(l)} - f_{\tilde{\tau}(k),\tilde{\tau}(l)} \\
&= (f_{\tau(k),\tau(l)} + f_{\tau(l),\tilde{\tau}(k)}) - (f_{\tau(l),\tilde{\tau}(k)} + f_{\tilde{\tau}(k),\tilde{\tau}(l)}) \\
&= f_{\tau(k),\tilde{\tau}(k)} - f_{\tau(l),\tilde{\tau}(l)} \\
&= h_k - h_l,
\end{aligned}$$

推出 $(g_{kl}) \sim (\tilde{g}_{kl})$.

引理 1.4.2. $\tau_{\mathscr{B}}^{\mathscr{U}}: H^1(\mathscr{U},\mathscr{F}) \to H^1(\mathscr{V},\mathscr{F})$ 是单射.

证明. 设 $(f_{ij}) \in Z^1(\mathscr{U},\mathscr{F})$ 使得 $\tau((f_{ij})) \in B^1(\mathscr{V},\mathscr{F})$. 需证明 $(f_{ij}) \in B^1(\mathscr{U},\mathscr{F})$.

设 $f_{\tau(k),\tau(l)} = g_k - g_l$，其中 $(g_k) \in C^0(\mathscr{V},\mathscr{F})$. 在 $U_i \cap V_k \cap V_l$ 上

$$g_k - g_l = f_{\tau(k),\tau(l)} = f_{\tau(k),i} + f_{i,\tau(l)} = f_{i,\tau(l)} - f_{i,\tau(k)},$$

推出 $g_k + f_{i,\tau(k)} = g_l + f_{i,\tau(l)}$. 进而由拼接引理，$h_i|_{V_k} := g_k + f_{i,\tau(k)} \in \mathscr{F}(U_i)$.

在 $U_i \cap U_j \cap V_k$ 上,

$$f_{ij} = f_{i,\tau(k)} + f_{\tau(k),j} = (f_{i,\tau(k)} + g_k) - (f_{j,\tau(k)} + g_k) = h_i - h_j.$$

由 k 的任意性及层的性质，$f_{ij} = h_i - h_j$ 于 $U_i \cap U_j$，进而 $[(f_{ij})] = 0$.

定义 1.4.6. 在不相交并 $\coprod_{\mathscr{U}} H^1(\mathscr{U},\mathscr{F})$ 中引入等价关系如下:

$\xi \in H^1(\mathscr{U},\mathscr{F}) \sim \eta \in H^1(\mathscr{U}',\mathscr{F})$ 等价于，存在加细 $\mathscr{V} < \mathscr{U},\mathscr{U}'$ 使得 $\tau_{\mathscr{V}}^{\mathscr{U}}(\xi) = \tau_{\mathscr{V}}^{\mathscr{U}'}(\eta)$.

定义 $H^1(X,\mathscr{F}) := \coprod_{\mathscr{U}} H^1(\mathscr{U},\mathscr{F})/\sim$，称其为 X 上系数在 $\mathscr{F}$ 中的一阶上同调群.

注 1.4.1. $H^1(X,\mathcal{O})$ 最重要，亏格.

定义 1.4.7. 设 $x = [\xi], y = [\eta] \in H^1(X,\mathscr{F})$，$\xi \in H^1(\mathscr{U},\mathscr{F})$，$\eta \in H^1(\mathscr{U}',\mathscr{F})$.

设 $\mathscr{V} < \mathscr{U},\mathscr{U}'$，则定义

$$x + y := [\tau_{\mathscr{V}}^{\mathscr{U}}(\xi) + \tau_{\mathscr{V}}^{\mathscr{U}'}(\eta)] \in H^1(X,\mathscr{F}).$$

验证该定义与代表元 ξ,η 以及加细 $\mathscr{V}$ 的选取无关.

命题 1.4.1. 典则映射 $H^1(\mathscr{U},\mathscr{F}) \to H^1(X,\mathscr{F})$，$\xi \mapsto [\xi]$ 是单射.

证明. 设 $[\xi] = [\eta]$，则存在 $\mathscr{V} < \mathscr{U}$ 使得 $\tau_{\mathscr{V}}^{\mathscr{U}}(\xi) = \tau_{\mathscr{V}}^{\mathscr{U}}(\eta)$，由引理知 $\eta = \xi$.

命题 1.4.2. $H^1(X,\mathscr{F}) = 0$ 等价于 $H^1(\mathscr{U},\mathscr{F}) = 0$，对于任意开覆盖 $\mathscr{U}$.

定理 1.4.1. *X 是 Riemann 面，$\mathcal{E}$ 是 X 上的可微函数层，则 $H^1(X,\mathcal{E})=0$.*

证明. 设 $\mathscr{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ 为 X 的任何一个开覆盖,不妨设为局部有限的. 只需证 $H^1(\mathscr{U},\mathcal{E})=0$.

取 $\{\chi_i\}_{i\in I}$ 是从属于 $\mathscr{U}$ 的一个单位分解. 设 $(f_{ij})\in Z^1(\mathscr{U},\mathcal{E})$.
$\chi_j f_{ij}\in\mathcal{E}(U_i)$，定义 $g_i:=\sum\limits_j\chi_j f_{ij}\in\mathcal{E}(U_i)$. 在 $U_i\cap U_j$ 上

$$\begin{aligned} g_i-g_j &= \sum_k \chi_k f_{ik}-\sum_k \chi_k f_{jk} \\ &= \sum_k \chi_k (f_{ik}-f_{jk}) \\ &= f_{ij}, \end{aligned}$$

推出 $(f_{ij})\in B^1(\mathscr{U},\mathcal{E})$.

定理 1.4.2. *设 $X=\{z\mid |z|<R\}$, $0<R\le+\infty$.*
1. $H^1(X,\mathbb{C})=0$. 2. $H^1(X,\mathbb{Z})=0$. $H^1(X,\mathcal{O})=0$.

证明. 设 $\mathscr{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ 为开覆盖.

1. 设 $(C_{ij})\in Z^1(\mathscr{U},\mathbb{C})\subset Z^1(\mathscr{U},\mathcal{E})$. 因为 $H^1(\mathscr{U},\mathcal{E})=0$，所以 $C_{ij}=f_i-f_j$，$f_i\in\mathcal{E}(U_i)$. 因为 $0=dC_{ij}=df_i-df_j$ 于 $U_i\cap U_j$，所以 $\omega|_{U_i}:=df_i\in\mathcal{E}^1(X)$ 且 $d\omega=0$.

   由 Poincaré 引理,存在 $f\in\mathcal{E}(X)$ 使得 $\omega=df$. 令 $C_i=f_i-f$,则 $dC_i=df_i-df=0$. 因此 $((C_i))\in C^0(\mathscr{U},\mathbb{C})$ 且 $C_{ij}=f_i-f_j=C_i-C_j$，故 $((C_{ij}))\in B^1(\mathscr{U},\mathbb{C})$.

2. 设 $(a_{jk})\in Z^1(\mathscr{U},\mathbb{Z})\subset Z^1(\mathscr{U},\mathbb{C})$. 因为 $H^1(\mathscr{U},\mathbb{C})=0$，所以 $a_{jk}=C_j-C_k$，$(C_j)\in C^0(\mathscr{U},\mathbb{C})$.

   因为 $1=e^{2\pi i a_{jk}}=e^{2\pi i(C_j-C_k)}$，所以 $e^{2\pi iC_j}=e^{2\pi iC_k}=b\neq 0$. 取 $C\in\mathbb{C}$ 使得 $b=e^{2\pi iC}$，令 $a_j:=C_j-C$.

   因为 $e^{2\pi i a_j}=e^{2\pi i(C_j-C)}=1$, 所以 $(a_j)\in C^0(\mathscr{U},\mathbb{Z})$ 且 $a_{jk}=C_j-C_k=a_j-a_k$, 故 $(c_{jk})\in B^1(\mathscr{U},\mathbb{Z})$.

3. 设 $(f_{ij})\in Z^1(\mathscr{U},\mathcal{O})\subset Z^1(\mathscr{U},\mathcal{E})$. 故 $f_{ij}=f_i-f_j$, 其中 $f_i\in\mathcal{E}(U_i)$. $0=d''f_{ij}=d''f_i-d''f_j$ 于 $U_i\cap U_j$，则定义 $\omega|_{U_i}=d''f_i\in\mathcal{E}^{(0,1)}(X)$.

   由 Dolbeault 引理，存在 $f\in\mathcal{E}(X)$ 使得 $\omega=d''f$. 令 $g_i:=f_i-f$，因为 $d''g_i=d''f_i-d''f=0$，故 $(f_{ij})\in B^1(\mathscr{U},\mathcal{O})$.

定理 1.4.3. *Leray.*

X 是拓扑空间，$\mathscr{F}$ 是 X 上的一个层，$\mathscr{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ 是 X 的一个开覆盖. 若 $H^1(U_i,\mathscr{F})=0,\ \forall i\in I$，则 $H^1(X,\mathscr{F})\cong H^1(\mathscr{U},\mathscr{F})$.

证明. 只需证明对于任意 $\mathscr{V}<\mathscr{U}$，设 τ 为对应的加细映射，有同构

$$\tau^{\mathscr{U}}_{\mathscr{V}}: H^1(\mathscr{U},\mathscr{F})\to H^1(\mathscr{V},\mathscr{F}).$$

只需再验证其是满射.

设 $(f_{\alpha\beta}) \in Z^1(\mathscr{V},\mathscr{F})$, 需找 $(F_{ij}) \in Z^1(\mathscr{U},\mathscr{F})$ 使得 $(F_{\tau(\alpha),\tau(\beta)})-(f_{\alpha\beta}) \in B^1(\mathscr{V},\mathscr{F})$(i.e. $\tau^{\mathscr{U}}_{\mathscr{V}}([(F_{ij})]) = [(f_{\alpha\beta})]$).

$\{U_i \cap V_\alpha\}_\alpha$ 构成 U_i 的一个开覆盖，记 $U_i \cap \mathscr{V}$. 因为 $H^1(U_i,\mathscr{F}) = 0$，所以 $H^1(U_i \cap \mathscr{V},\mathscr{F}) = 0$. 进而存在 $g_{i\alpha} \in \mathscr{F}(U_i \cap V_\alpha)$ 使得 $f_{\alpha\beta} = g_{i\alpha} - g_{i\beta}$ 于 $U_i \cap V_\alpha \cap V_\beta$, $f_{\alpha\beta} = g_{j\alpha} - g_{j\beta}$ 于 $U_j \cap V_\alpha \cap V_\beta$ 于 $U_j \cap V_\alpha \cap V_\beta$.

因此在 $U_i \cap U_j \cap V_\alpha \cap V_\beta$ 上, $g_{j\alpha} - g_{i\alpha} = g_{j\beta} - g_{i\beta}$. 我们定义 $F_{ij}|_{U_i \cap U_j \cap V_\alpha} := g_{j\alpha} - g_{i\alpha} \in \mathscr{F}(U_i \cap U_j)$ 且 $(F_{ij}) \in Z^1(\mathscr{U},\mathscr{F})$.

令 $h_\alpha := g_{\tau(\alpha),\alpha} \in \mathscr{F}(V_\alpha)$，有

$$F_{\tau(\alpha),\tau(\beta)} - f_{\alpha\beta} = (g_{\tau(\beta),\alpha} - g_{\tau(\alpha),\alpha}) - (g_{\tau(\beta),\alpha} - g_{\tau(\beta),\beta}) = g_{\tau(\beta),\beta} - g_{\tau(\alpha),\alpha} = h_\beta - h_\alpha,$$

推出 $(F_{\tau(\alpha),\tau(\beta)}) - (f_{\alpha,\beta}) \in B^1(\mathscr{V},\mathscr{F})$.

定理 1.4.4. $H^1(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}) = 0$.

证明. 令 $U_1 = \mathbb{P}^1 \backslash \{\infty\}, U_2 = \mathbb{P}^1 \backslash \{0\}, \mathbb{P}^1 = U_1 \cup U_2$. 则 $U_1 = \mathbb{C}, U_2 \cong \mathbb{C}$, 故 $H^1(U_i,\mathcal{O}) = 0$, $i = 1, 2$.

由 Leray 定理，$H^1(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}) \cong H^1(\mathscr{U},\mathcal{O})$. 因为 $U_1 \cap U_2 = \mathbb{C}^*$，则对于任意 $f_{12} \in \mathcal{O}(U_1 \cap U_2)$，可展开为 $f_{12}(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$.

令 $f_1(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$，$f_2(z) = -\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n$. 则 $f_1 \in \mathcal{O}(U_1)$，$f_2 \in \mathcal{O}(U_2)$ 且 $f_{12} = f_1 - f_2$，故 $(f_{12}) \in B^1(\mathscr{U},\mathcal{O})$ 推出 $H^1(\mathscr{U},\mathcal{O}) = 0$.

命题 1.4.3. $H^0(X,\mathscr{F}) \cong \mathscr{F}(X)$

证明. 若 $(f_i) \in Z^0(\mathscr{U},\mathscr{F})$，则 $0 = \delta((f_i)) = f_i - f_j$，推出 $f_i = f_j$ 于 $U_i \cap U_j$，故可定义 $f|_{U_i} = f_i \in \mathscr{F}(X)$.

反过来, 对于任意 $f \in \mathscr{F}(X)$, 若令 $f_i = f|_{U_i}$, 则 $(f_i) \in Z^0(\mathscr{U},\mathscr{F})$, 因此 $H^0(X,\mathscr{F}) \cong \mathscr{F}(X)$.

1.5 有限性定理

注 1.5.1. 目标：若 X 是紧 *Riemannm* 面，则 $\dim_{\mathbb{C}} H^1(X,\mathcal{O})<\infty$.

命题 1.5.1. E,F 是 *Banach* 空间，$T:E\to F$ 是一个连续，线性满射，则存在 $C>0$ 使得 $\forall y\in F$，存在 $x\in E$ 使得 $Tx=y$ 且 $\|x\|\le C\|y\|$.

证明. 令 $U:=\{x\in E\mid \|x\|<1\}$. 由 Banach 开映射定理，存在 $\varepsilon>0$ 使得

$$F(U)\supset V:=\{y\in F\mid \|y\|<\varepsilon\}.$$

不妨设 $y\neq 0$. 则取 $y_1:=\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{y}{\|y\|}\in V$. 则存在 $x_1\in U$ 使得 $Tx_1=y_1$. 因为 T 线性，故 $T(\frac{2\|y\|}{\varepsilon}x_1)=y$. 令 $x:=\frac{2\|y\|}{\varepsilon}x_1$，则 $Tx=y$，且 $\|x\|\le\frac{2}{\varepsilon}\|y\|$.

定义 1.5.1. 设 $D\subset\mathbb{C}$ 是开集，

$$L^2(D):=\{f\mid \int_D |f|^2<\infty\},$$

定义 $A^2(D)=L^2(D)\cap\mathcal{O}(D)$ 是 *Bergman* 空间.

引理 1.5.1. *Bergman* 不等式.

记 $D_r=\{z\in D:d(z,\partial D)>r\}$，则 $\forall f\in A^2(D)$，有

$$\|f\|_{L^\infty(D_r)}\le\frac{1}{\sqrt{\pi}r}\cdot\|f\|_{L^2(D)}.$$

证明. 对于 D_r 中的任意一点，$\Delta(a,r)\subset D$. 由调和函数均值性 $f^2(a)=\frac{1}{|\Delta(a,r)|}\int_{\Delta(a,r)}f^2$，有

$$|f(a)|^2\le\frac{1}{\pi r^2}\int_{\Delta(a,r)}|f|^2\le\frac{1}{\pi r^2}\int_D|f|^2.$$

引理 1.5.2. L^2-*Schwarz* 引理.

设 $D^1\subset\subset D\subset\mathbb{C}$ 为两个开集，则对于任意 $\varepsilon>0$，存在余维数有限的闭子空间 $A\subset A^2(D)$ 使得 $\|f\|_{L^2(D)}\le\varepsilon\|f\|_{L^2(D)},\forall f\in A$.

证明. 因为 $\overline{D^1}\subset D$ 是紧集，所以由 Heine-Borel 定理，存在 $a_1,\cdots,a_k\in\overline{D^1}$ 以及 $r>0$ 使得

1. $\Delta(a_j,r)\subset\subset D, 1\le j\le k$;
2. $\overline{D^1}\subset\bigcup\limits_{j=1}^k\Delta(a_j,\frac{r}{2})$.

取 n 充分大使得 $\frac{k}{2^{n+1}}<\varepsilon$，令

$$A:=\{f\in A^2(D):\operatorname{ord}_{a_j}f\ge n,1\le j\le k\},$$

则 $a\subset A^2(D)$ 为闭子空间.

$$A^\perp\subset\bigcup_{j=1}^k\{f\in A^2(D):\operatorname{ord}_{a_j}f<n\},$$

则 $\dim A^\perp<k\cdot n$.

设 $f\in A$，其在每个 a_j 处有 Taylor 展开 $f(z)=\sum\limits_{\nu=n}^{\infty}c_\nu(z-a_j)^\nu$. 设 $\rho\le r$，则

$$\begin{aligned}\int_{\Delta(a_j,\rho)}|f|^2&=\int_{\Delta(a_j,\rho)}\sum_{\mu,\nu=n}^{\infty}C_\mu\overline{C_\nu}(a-a_j)^\nu(\overline{z-a_j})^\nu\\&=\int_0^\rho\sum_{\mu,\nu=n}^{\infty}C_\mu\overline{C_\nu}t^{\mu+\nu}e^{i(\mu-\nu)\theta}tdtd\theta\\&=\int_0^\rho\int_0^{2\pi}\sum_{\nu=n}^{\infty}|C_\nu|^2t^{2\nu}tdtd\theta\\&=\pi\sum_{\nu=n}^{\infty}|C_\nu|^2\cdot\frac{\rho^{2\nu+2}}{\nu+1}.\end{aligned}$$

故有

$$\|f\|_{L^2(\Delta(a_j,\frac{r}{2}))}\le\frac{1}{2^{n+1}}\|f\|_{L^2(\Delta(a_j,r))}.$$

进而

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^2(D^1)}&\le\sum_{j=1}^{k}\|f\|_{L^2(\Delta(a_j,\frac{r}{2}))}\\&\le\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{j=1}^{k}\|f\|_{L^2(\Delta(a_j,r))}\\&\le\frac{k}{2^{n+1}}\cdot\|f\|_{L^2(D)}\\&<\varepsilon\cdot\|f\|_{L^2(D)}.\end{aligned}$$

定义 1.5.2. *X 是 Riemann 面，考虑有限个坐标圆盘 $U_1^*,\cdots,U_n^*$，即 $z_j(U_j^*)\subset\mathbb{C}$ 是一个圆盘. 设 $U_j\subset U_j^*$ 是开集，令 $\mathscr{U}=\{U_j\}_{j=1}^n$.*

我们引入 $C^0(\mathscr{U},\mathcal{O})$ 以及 $C^1(\mathscr{U},\mathcal{O})$ 上的 L^2 范数如下:

若 $\eta=(f_i)\in C^0(\mathscr{U},\mathcal{O})$，定义

$$\|\eta\|_{L^2(\mathscr{U})}:=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\|f_i\|_{L^2(U_i)}}.$$

若 $\xi=(f_{ij})\in C^1(\mathscr{U},\mathcal{O})$，定义

$$\|\xi\|_{L^2(\mathscr{U})}:=\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}\|f_{ij}\|_{L^2(U_i\cap U_j)}}.$$

这里 $\|f_i\|_{L^2(U_i)}=\|f_i\circ z_i^{-1}\|_{z_i(L^2(U_i))}$, $\|f_{ij}\|_{L^2(U_i\cap U_j)}=\|f_{ij}\circ z_i^{-1}\|_{z_i(L^2(U_i\cap U_j))}$.

令 $C^0_{(2)}(\mathscr{U},\mathcal{O}):=C^0(\mathscr{U},\mathcal{O})\cap L^2$，$C^1_{(2)}(\mathscr{U},\mathcal{O}):=C^1(\mathscr{U},\mathcal{O})\cap L^2$，$Z^1_{(2)}(\mathscr{U},\mathcal{O}):=Z^1_{(2)}(\mathscr{U},\mathcal{O})\cap L^2$.

设 $\mathscr{V}=\{V_i\}_{i=1}^n$，其中开集 $V_i\subset\subset U_i$，记 $\mathscr{V}<<\mathscr{U}$.

由上一个引理, $\forall\varepsilon>0$, 存在余维数有限的闭子空间 $A\subset Z^1_{(2)}(\mathscr{U},\mathcal{O})$ 使得 $\|\zeta\|_{L^2(\mathscr{V})}\le\varepsilon\cdot\|\zeta\|_{L^2(\mathscr{U})}$, $\forall\xi\in A$.

引理 1.5.3. 设 $\mathscr{W} << \mathscr{V} << \mathscr{U} << \mathscr{U}^*$，其中 $\mathscr{U}^*$ 如上. 则存在 $C > 0$ 使得 $\forall \xi \in Z^1_{(2)}(\mathscr{V}, \mathcal{O})$，存在 $\zeta \in Z^1_{(2)}(\mathscr{U}, \mathcal{O})$，$\eta \in C^0_{(2)}(\mathscr{W}, \mathcal{O})$ 使得 $\zeta = \xi + \delta\eta$ 于 $\mathscr{W}$，且

$$\max\{\|\zeta\|_{L^2(\mathscr{U})}, \|\eta\|_{L^2(\mathscr{W})}\} \leq C \cdot \|\xi\|_{L^2(\mathscr{V})}.$$

证明. (1). 设 $\xi = (f_{ij}) \in Z^1_{(2)}(\mathscr{V}, \mathcal{O}) \subset Z^1(\mathscr{V}, \mathcal{E})$. 因为 $H^1(\mathscr{V}, \mathcal{E}) = 0$，所以 $f_{ij} = g_i - g_j$ 于 $V_i \cap V_j$，$g_i \in \mathcal{E}(V_i)$.

$d'' f_{ij} = 0$，所以 $d'' g_i = d'' g_j$ 于 $U_i \cap U_j$. 故定义 $\omega|_{V_i} := d'' g_i \in \mathcal{E}^{(0,1)}(|\mathscr{V}|)$，其中 $|\mathscr{V}| = \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_i$.

因为 $\mathscr{W} << \mathscr{V}$，所以存在可微函数 ψ 使得 $supp\ \psi \subset |\mathscr{W}|$ 且 $\psi|_{\mathscr{W}} = 1$. 进而 $\psi \cdot \omega \in \mathcal{E}^{(0,1)}(|\mathscr{U}^*|)$.

因为任意 U_i^* 是坐标圆盘，由 Dolbeault 引理，存在 $H_i \in \mathcal{E}(U_i^*)$ 使得 $d'' h_i = \psi \cdot \omega$.

在 $U_i^* \cap U_j^*$ 上，$d'' h_i = d'' h_j$，故 $h_i - h_j \in \mathcal{O}(U_i^* \cap U_j^*)$. 令 $F_{ij} = h_i - h_j$，$\zeta := (F_{ij}) \in Z^1_{(2)}(\mathscr{U}, \mathcal{O})$.

设 $\mathscr{W} = \{W_i\}_{i=1}^n$，在每个 W_i 上有 $d'' h_i = \omega = d'' g_i$，进而 $h_i - g_i \in \mathcal{O}(W_i) \cap L^2(W_i)$. 定义

$$\eta := ((g_i - h_i)|_{W_i}) \in C^0_{(2)}(\mathscr{W}, \mathcal{O}).$$

$$F_{ij} - f_{ij} = (h_i - h_j) - (g_i - g_j) = (h_i - g_i) - (h_j - g_j)$$

即有 $\zeta - \xi = \delta\eta$ 于 $\mathscr{W}$.

(2). 考虑 Hilbert 空间

$$H := Z^1_{(2)}(\mathscr{U}, \mathcal{O}) \times Z^1_{(2)}(\mathscr{V}, \mathcal{O}) \times C^0_{(2)}(\mathscr{W}, \mathcal{O}),$$

$$\|(\zeta, \xi, \eta)\|_H := \sqrt{\|\zeta\|^2_{L^2(\mathscr{U})} + \|\xi\|^2_{L^2(\mathscr{B})} + \|\eta\|^2_{L^2(B)}}.$$

作子空间

$$L := \{(\zeta, \xi, \eta) \in H : \zeta = \xi + \delta\eta \ at\ \mathscr{W}\},$$

则 $L \subset H$ 是闭子空间 (练习，利用 Bergman 不等式). 特别地，L 是 Hilbert 空间.

考虑投射 $\pi : L \to Z^1_{(2)}(\mathscr{V}, \mathcal{O})$，$(\zeta, \xi, \eta) \mapsto \xi$，其为线性映射，且由 (1) 知其为满射. 由命题，对于任意 $\xi \in Z^1_{(2)}(\mathscr{V}, \mathcal{O})$，存在 $(\zeta, \xi, \eta) \in L$ 使得 $\pi(\zeta, \xi, \eta) = \xi$ 且

$$\|(\zeta, \xi, \eta)\|_H \leq C \cdot \|\xi\|_{L^2(\mathscr{V})}.$$

引理 1.5.4. 在上一个引理的条件下，存在有限维子空间 $S \subset Z^1_{(2)}(\mathscr{U}, \mathcal{O})$ 使得对于任意 $\xi \in Z^1(\mathscr{U}, \mathcal{O})$，存在 $\sigma \in S$，$\eta \in C^0_{(2)}(\mathscr{W}, \mathcal{O})$ 使得 $\sigma = \xi + \delta\eta$ 于 $\mathscr{W}$.

即限制映射 $H^1(\mathscr{U}, \mathcal{O}) \to H^1(\mathscr{W}, \mathcal{O})$，$[\xi] \mapsto [\xi|_{\mathscr{W}}] = [\sigma|_{\mathscr{W}}]$ 的像的维数有限.

证明. 取 C 为上一个引理中的常数，由上上条引理，对于 $\varepsilon := \frac{1}{2C}$，存在余维数有限的子空间 $A \subset Z^1_{(2)}(\mathscr{U}, \mathcal{O})$ 使得 $\|\xi\|_{L^2(\mathscr{B})} \leq \varepsilon \|\xi\|_{L^2(\mathscr{U})}, \forall \xi \in A$.

令 $S := A^\perp \subset Z^1_{(2)}(\mathscr{U}, \mathcal{O})$，则 $\dim S < \infty$. 设 $\xi \in Z^1(\mathscr{U}, \mathcal{O})$，因为 $\mathscr{B} << \mathscr{U}$，所以 $\|\xi\|_{L^2(\mathscr{B})} := M < \infty$. 由上一条引理，存在 $\zeta_0 \in Z^1_{(2)}(\mathscr{U}, \mathcal{O})$, $\eta \in C^0_{(2)}(\mathscr{W}, \mathcal{O})$ 使得 $\zeta_0 = \xi + \delta\eta$ 于 $\mathscr{W}$，且 $\|\zeta_0\|_{L^2(\mathscr{U})} \leq C \cdot M$，$\|\eta\|_{L^2(B)} \leq C \cdot M$.

令 $\zeta_0=\xi_0\oplus\sigma_0\in A\bigoplus A^{\perp}$. 归纳地，构造 $\xi_\nu\in Z^1_{(2)}(\mathscr{U},\mathcal{O})$, $\eta_\nu\in C^0_{(2)}(\mathscr{W},\mathcal{O})$，$\xi_\nu\in A$, $\sigma_\nu\in A^{\perp}$ 使得

1. $\zeta_\nu=\xi_{\nu-1}+\delta\eta_\nu$ 于 $\mathscr{W}$.
2. $\zeta_\nu=\xi_\nu\oplus\sigma_\nu\in A\bigoplus S$.
3. $\|\zeta_\nu\|_{L^2(\mathscr{U})}\le\frac{C\cdot M}{2^\nu}$. $\|\eta_\nu\|_{L^2(B)}\le\frac{C\cdot M}{2^\nu}$.

$\nu=0$ 成立. 假设 ν 时已构造，因为 $\zeta_\nu=\xi_\nu\oplus\sigma_\nu$，所以

$$\|\xi_\nu\|_{L^2(\mathscr{U})}\le\|\zeta_\nu\|_{L^2(\mathscr{U})}\le\frac{C\cdot M}{2^\nu}.$$

进而

$$\|\xi_\nu\|_{L^2(\mathscr{B})}\le\varepsilon\|\zeta_\nu\|_{L^2(\mathscr{U})}\le\frac{M}{2^{\nu+1}}.$$

由上条引理，存在 $\zeta_{\nu+1}\in Z^1_{(2)}(\mathscr{U},\mathcal{O})$，$\eta_{\nu+1}\in C^0(\mathscr{W},\mathcal{O})$ 使得 $\zeta_{\nu+1}=\xi_\nu+\delta\eta_{\nu+1}$ 且

$$\|\zeta_{\nu+1}\|_{L^2(\mathscr{U})}\le C\cdot\|\xi_\nu\|_{L^2(\mathscr{B})}\le\frac{C\cdot M}{2^{\nu+1}},$$

$$\|\eta_{\nu+1}\|_{L^2(B)}\le C\cdot\|\xi_\nu\|_{L^2(\mathscr{B})}\le\frac{C\cdot M}{2^{\nu+1}},$$

只需正交分解 $\zeta_{\nu+1}=\xi_{\nu+1}\oplus\sigma_{\nu+1}$ 即可.

$$\begin{cases}\xi_0+\sigma_0=\xi+\delta\eta_0\\ \xi_1+\sigma_1=\xi_0+\delta\eta_1\\ \vdots\\ \xi_k+\sigma_k=\xi_{k-1}+\delta\eta_k.\end{cases}$$

相加，得到 $\zeta_k+\sum\limits_{j=0}^{k}\sigma_j=\xi+\delta\sum\limits_{j=0}^{k}\eta_j$.

由 3，当 $k\to\infty$ 时，$\zeta_k\to 0$,

$$\sum_{j=0}^{k}\sigma_j\to\sum_{j=0}^{\infty}\sigma_j=:\sigma\in S.$$

$$\sum_{j=0}^{k}\eta_j\to\sum_{j=0}^{\infty}\eta_j=:\eta\in C^0_{(2)}(\mathscr{W},\mathcal{O}).$$

则 $\sigma=\xi+\delta\eta$ 于 $\mathscr{W}$.

定理 1.5.1. *X 是 Riemann 面，$Y_1\subset\subset Y_2\subset X$ 是开集，则限制映射 $H^1(Y_2,\mathcal{O})\to H^1(Y_1,\mathcal{O})$ 的像的维数有限.*

证明. 取有限个坐标圆盘 $\{U_i^*\subset Y_2\}_{i=1}^n$，再取坐标圆盘 $W_i\subset\subset V_i\subset\subset U_i\subset\subset U_i^*$ 使得 $Y_1\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}W_i=:Y'\subset Y'':=\bigcup\limits_{i=1}^{n}U_i\subset\subset Y_2$. 令 $\mathscr{W}=\{W_i\}$, $\mathscr{V}=\{V_i\}$, $\mathscr{U}=\{U_i\}$, $\mathscr{U}^*=\{U_i^*\}$，则 $\mathscr{W}<<\mathscr{V}<<\mathscr{U}<<\mathscr{U}^*$.

由上个引理，限制映射 $H^1(\mathscr{U},\mathcal{O})\to H^1(\mathscr{W},\mathcal{O})$ 的像的维数有限. 由 Dolbeault 引理，$H^1(U_i,\mathcal{O})=0=H^1(W_i,\mathcal{O})$，由 Leray 定理，$H^1(Y'',\mathcal{O})\cong H^1(\mathscr{U},\mathcal{O})$，$H^1(Y',\mathcal{O})\cong H^1(\mathscr{W},\mathcal{O})$. 因此限制映射 $H^1(Y'',\mathcal{O})\to H^1(Y',\mathcal{O})$ 的像的维数有限.

$H^1(Y_2,\mathcal{O}) \to H^1(Y_1,\mathcal{O})$ 的限制映射由下面的限制映射复合而成:

$$H^1(Y_2,\mathcal{O}) \to H^1(Y'',\mathcal{O}) \to H^1(Y',\mathcal{O}) \to H^1(Y_1,\mathcal{O}),$$

得证.

推论 1.5.1. *X 是紧 Riemann 面，则*

$$g := \dim_{\mathbb{C}} H^1(X,\mathcal{O}) < \infty.$$

称其为 X 的亏格 (genus).

证明. 只需在定理中取 $Y_1 = Y_2 = X$.

例子 1.5.1. $H^1(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}) = 0$，故 $\mathbb{P}^1$ 的亏格为 0.

定理 1.5.2. *设 X 是 Riemann 面，$Y \subset\subset X$ 开，则对于任意 $a \in Y$，存在 $f \in \mathcal{M}(Y)$ 使得 $f \in \mathcal{O}(Y\backslash\{a\})$，且 a 是 f 的极点.*

证明. 由定理，$k := \dim \mathrm{Im}(H^1(X,\mathcal{O}) \to H^1(Y,\mathcal{O})) < \infty$. 取 a 处的坐标邻域 (U_1, z) 使得 $z(a) = 0$. 令 $U_2 = X\backslash\{a\}$，则 $\mathscr{U} = \{U_1, U_2\}$ 是 X 的一个开覆盖.

$U_1 \cap U_2 = U_1\backslash\{a\}$，所以 $z^{-j} \in \mathcal{O}(U_1 \cap U_2), 1 \le j \le k+1$. 其代表了一个 $\zeta_j \in Z^1(\mathscr{U},\mathcal{O})$. 则 $\zeta_j|_Y \in Z^1(\mathscr{U} \cap Y,\mathcal{O}), 1 \le j \le k+1$，在模去上边缘以后是线性相关的. 即存在不全为 0 的复数 $c_1, \cdots, c_{k+1}$ 以及 $\eta = (f_1, f_2) \in C^0_{(2)}(\mathscr{U} \cap Y,\mathcal{O})$ 使得

$$c_1\zeta_1 + \cdots + c_{k+1}\zeta_{k+1} = \delta\eta,$$

则 $\sum_{j=1}^{k+1} c_j z^{-j} = f_2 - f_1$ 于 $U_1\backslash\{a\} = U_1 \cap U_2$

令 $f := \begin{cases} f_1 + \sum_{j=1}^{k+1} c_j z^{-j}, & \text{at } U_1 \cap Y \\ f_2, & \text{at } U_2 \cap Y \end{cases} \in \mathcal{M}(Y)$ 即为所求.

推论 1.5.2. *插值问题*

X 是紧 Riemann 面，$a_1, \cdots, a_n \in X$ 是 n 个不同点，则对于任意 $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{C}$，存在亚纯函数 $f \in \mathcal{M}(Y)$ 使得

$$f(a_j) = c_j,\ \forall 1 \le j \le n.$$

证明. 由上一个定理，对任意 i,j，存在 $f_{ij} \in \mathcal{M}(X)$ 使得 a_i 为 f_{ij} 的极点，$f_{ij} \in \mathcal{O}_{a_j}$. 取 $\lambda_{ij} \in \mathbb{C}^*$ 使得 $f_{ij}(a_k) \ne f_{ij}(a_j) - \lambda_{ij}$, $\forall i,j,k$.

令 $g_{ij} := \frac{f_{ij} - f_{ij}(a_j)}{f_{ij} - f(a_j) + \lambda_{ij}} \in \mathcal{M}(X)$，则 $g_{ij} \in \mathcal{O}_{a_k}$, $\forall i,j,k$，且 $g_{ij}(a_i) = 1$, $g_{ij}(a_j) = 0$.

令 $H_i := \prod_{k \ne i} g_{ik} \in \mathcal{M}(X)$ 使得 $h_i(a_j) = \delta_{ij}$. 令 $f := \sum_{i=1}^n c_i h_i$ 即可.

推论 1.5.3. *X 是非紧的 Riemann 面，$Y \subset\subset X$ 开，则存在 $f \in \mathcal{O}(Y)$ 使得其在 Y 的任何一个连通分支上非常值.*

证明. 取区域 Y' 使得 $Y \subset\subset Y' \subset\subset X$. 取 $a \in Y'\backslash Y$，对 (Y', a) 应用定理，即得.

定理 1.5.3. X 是非紧的 *Riemann* 面，$Y \subset\subset Y' \subset\subset X$ 开，则

$$\mathrm{Im}(H^1(Y',\mathcal{O}) \to H^1(Y,\mathcal{O})) = 0.$$

证明. 记像集为 L，设 $n := \dim L < \infty$. 取 $\xi_1, \cdots, \xi_n \in H^1(Y',\mathcal{O})$ 使得 $\xi_1|_Y, \cdots, \xi_n|_Y$ 生成 L. 取 Y' 上的全纯函数 f 使得其在 Y' 的任何连通分支上非常值.

取 $C_{\mu\nu} \in \mathbb{C}$ 使得

$$f\xi_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} C_{\mu\nu}\xi_\mu \text{ at } Y, 1 \le \nu \le n.$$

令 $A := (f \cdot \delta_{\mu\nu} - C_{\mu\nu})_{n\times n}$, $F := \det A$. 则 $F \in \mathcal{O}(Y')$ 且在 Y' 的任何连通分支上不恒为 0.

则有 $A \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = 0$. 记 A^* 为 A 的伴随矩阵，则 $A^*A = \begin{pmatrix} F & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & F \end{pmatrix}$，推出 $F\xi_\nu = 0$, $1 \le \nu \le n$ 于 Y.

设 $\zeta \in H^1(Y',\mathcal{O})$ 可由某个 $(f_{ij}) \in Z^1(\mathscr{U},\mathcal{O})$ 表示，$\mathscr{U} = \{U_i\}$ 是 Y' 的开覆盖，使得 $\forall U_i$ 至多包含 F 的一个零点，则 $F \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j), \forall i \ne j$. 进而 $g_{ij} := f_{ij}/F \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$. 令 $\xi := [(g_{ij})] \in H^1(Y',\mathcal{O})$，则 $\zeta|_Y = F\xi|_Y = 0$.

推论 1.5.4. X 是非紧的 *Riemann* 面，$Y \subset\subset Y' \subset\subset X$ 开，则任意 $\omega \in \mathcal{E}^{(0,1)}(Y')$，存在 $f \in \mathcal{E}(Y)$，使得 $d''f = \omega$ 于 Y.

证明. 取 $\mathscr{U} = \{U_i\}_i$ 为 Y' 的一个坐标圆盘覆盖，由 Dolbeault 引理，对于任意 $f_i \in \mathcal{E}(U_i)$ 使得 $d''f_i = \omega$ 于 U_i.

因为 $d''(f_i - f_j) = \omega - \omega = 0$ 于 $U_i \cap U_j$，所以 $f_i - f_j \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$，故 $(f_i - f_j) \in Z^1(\mathscr{U},\mathcal{O})$.

因为 $[(f_i - f_j)|_{Y\cap\mathscr{U}}] = 0$, 所以存在 $g_i \in \mathcal{O}(Y \cap U_i)$ 使得 $f_i - f_j = g_i - g_j$ 于 $Y \cap U_i \cap U_j$，等价于 $f_i - g_i = f_j - g_j$.

定义 $f|_{Y\cap U_i} := f_i - g_i \in \mathcal{E}(Y)$ 使得 $d''f = d''f_i - \omega$.

1.6 正合上同调列

定义 1.6.1. 设 X 是拓扑空间，$\mathscr{F},\mathscr{G}$ 是 X 上的层，一个层同态 $\alpha:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ 是指一族群同态 $\alpha_U:\mathscr{F}(U)\to\mathscr{G}(U)$，$\forall U\subset X$ 开，满足 $\forall V\subset U$ 开，有下列图表交换

$$\begin{array}{ccc}\mathscr{F}(U) & \xrightarrow{\alpha_U} & \mathscr{G}(U)\\ \big\downarrow{\scriptstyle \rho_V^U} & & \big\downarrow{\scriptstyle \rho_V^U}\\ \mathscr{F}(V) & \xrightarrow{\alpha_V} & \mathscr{G}(V)\end{array}.$$

例子 1.6.1. *1.* 外微分算子 d,d',d''.

2. 包含映射 $\iota:\mathcal{O}\to\mathcal{E}$, $\mathbb{C}\to\mathcal{E}$, $\mathbb{Z}\to\mathcal{O}$.

3. $ex:\mathcal{O}\to\mathcal{O}^*$，对于任意开集 U，

$$\begin{aligned}ex|_U:\mathcal{O}(U)&\to\mathcal{O}^*(U)\\ f&\mapsto e^{2\pi i f}\end{aligned}$$

定义 1.6.2. 设 $\alpha:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ 是层同态，对于任意开集 U，定义

$$K(U):=\mathrm{Ker}(\mathscr{F}(U)\xrightarrow{\alpha_U}\mathscr{G}(U),$$

配以通常的限制映射，其诱导出一个层 $\kappa=\mathrm{Ker}\ \alpha$.

例子 1.6.2. $\mathcal{O}=\mathrm{Ker}(\mathcal{E}\xrightarrow{d''}\mathcal{E}^{(0,1)})$，即是 *Cauchy-Riemann* 方程.

$\Omega=\mathrm{Ker}(\mathcal{E}^{(1,0)}\xrightarrow{d}\mathcal{E}^2)$.

$\mathbb{Z}=\mathrm{Ker}(\mathcal{O}\xrightarrow{ex}\mathcal{O}^*)$.

定义 1.6.3. 设 $\alpha:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ 是层同态，对于任意开集 U，定义

$$B(U):=\mathrm{Im}(\mathscr{F}(U)\xrightarrow{\alpha_U}\mathscr{G}(U),$$

配以通常的限制映射，其诱导出一个预层 $\mathrm{Im}\ \alpha$，但一般来说其不是层. （一般不满足拼接原理）

例子 1.6.3. $ex:\mathcal{O}\to\mathcal{O}^*$，令 $U_+:=\mathbb{C}^*\backslash\mathbb{R}_+$，$U_-:=\mathbb{C}^*\backslash\mathbb{R}_-$，则 $\mathbb{C}^*=U_+\cup U_-$. 因为 $U_\pm$ 单连通，

$$\text{存在 } f_\pm\in\mathcal{O}(U_\pm),\ s.t.\ ex(f_\pm)=z$$

且 $f_+=f_-$ 于 $U_+\cap U_-$. 但是不存在 $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C}^*)$ 使得 $ex(f)=z$ 成立. 拼接原理不成立.

定义 1.6.4. 设 $\alpha:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ 是一个层，其诱导出群同态 $\alpha_x:\mathscr{F}_x\to\mathscr{G}_x$.

称 $\mathscr{F}\xrightarrow{\alpha}\mathscr{G}\xrightarrow{\beta}\mathscr{H}$ 是正合的，若对任意 $x\in X$，有

$$\mathscr{F}_x\xrightarrow{\alpha_x}\mathscr{G}_x\xrightarrow{\beta_x}\mathscr{H}_x$$

正合，即 $\mathrm{Ker}\,\beta_x-\mathrm{Im}\,\alpha_x$.

称

$$\mathscr{F}\xrightarrow{\alpha_1}\mathscr{F}_1\xrightarrow{\alpha_2}\mathscr{F}_3\xrightarrow{\alpha_3}\cdots\xrightarrow{\alpha_{n-1}}\mathscr{F}_n$$

是正合的，若 $\mathscr{F}_k\xrightarrow{\alpha_k}\mathscr{F}_{k+1}\xrightarrow{\alpha_{k+1}}\mathscr{F}_{k+2}$ 正合，$\forall 1\le k\le n-2$.

称正合列 $0\to\mathscr{F}\xrightarrow{\alpha}\mathscr{G}\xrightarrow{\beta}\mathscr{H}\to 0$ 是一个短正合列.

例子 1.6.4. 短正合列

$$0 \to \mathcal{O} \xrightarrow{\iota} \mathcal{E} \xrightarrow{d''} \mathcal{E}^{(0,1)} \to 0,$$

最后一步是 *Dolbeault* 引理.

$$0 \to \mathbb{C} \xrightarrow{\iota} \mathcal{E} \xrightarrow{d} Ker(d : \mathcal{E}^1 \to \mathcal{E}^2) \to 0,$$

最后一步是 *Poincaré* 引理.

$$0 \to \mathbb{C} \xrightarrow{\iota} \mathcal{O} \xrightarrow{d} \Omega \to 0,$$

最后一步是 *Poincaré* 引理.

$$0 \to \Omega \xrightarrow{\iota} \mathcal{E}^{(1,0)} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2 \to 0,$$

$\forall \Phi = g dz \wedge d\bar{z}$, 设 $\omega = f dz \in \mathcal{E}^{(1,0)}$，则 $d\omega = \Phi$ 等价于 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = -g$，这由 *Dolbeault* 引理保证.

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} \mathcal{O} \xrightarrow{ex} \mathcal{O}^* \to 0.$$

引理 1.6.1. 若 $\alpha : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ 是单射，则对于任意开集 U，$\alpha_U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ 是单射.

证明. 设 $f \in \mathscr{F}(U)$，使得 $\alpha_U(f) = 0$.

因为对于任意 $x \in U$，$\alpha_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$ 是单射，故存在邻域 $x \in V_x \subset U$ 使得 $f|_{V_x} = 0$. 因为 $U = \bigcup\limits_{x \in U} V_x$，由层的定义，$f|_U = 0$.

引理 1.6.2. 设 $0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{G} \xrightarrow{\beta} \mathscr{H}$ 正合，则对于任意开集 U，有正合列

$$0 \to \mathscr{F}(U) \xrightarrow{\alpha_U} \mathscr{G}(U) \xrightarrow{\beta_U} \mathscr{H}(U).$$

证明. 由引理 1.6.1，第一处正合. 我们考虑第二处.

Im $\alpha \subset$ Ker β：设 $f \in \mathscr{F}(U)$，$g = \alpha_U(f)$. 因为 Ker $\beta_x =$ Im α_x，故存在邻域 $x \in V_x \subset U$ 使得 $\beta(g) = \beta \circ \alpha(f) = 0$ 于 V_x. 因为 $U = \bigcup\limits_{x \in U} V_x$，由层的定义，$\beta(g) = 0$ 于 U，即 Im $\alpha \subset$ Ker β.

Ker $\beta \subset$ Im α:设 $g \in \mathscr{G}(U)$ 使得 $\beta(g) = 0$. 因为对于任意 $x \in X$,有 Ker $\beta_x =$ Im α_x，故存在邻域 $\alpha \in V_x \subset U$ 以及 $f_x \in \mathscr{F}(V_x)$ 使得 $\alpha(f_x) = g$ 于 V_x.

因为 $\alpha(f_x - f_y) = g - g = 0$ 于 $V_x \cap V_y$，由引理 1.6.1，推出 $f_x \cong f_y$ 于 $V_x \cap V_y$. 故由拼接原理，存在 $f \in \mathscr{F}(U)$ 使得 $f|_{V_x} := f_x \in \mathscr{F}(V_x)$ 且在每个 V_x 上，$\alpha(f) = \alpha(f_x) = g$.

定义 1.6.5. 设 $\alpha : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ 是层同态，其诱导出

$$\alpha^1 : H^1(X, \mathscr{F}) \to H^1(X, \mathscr{G})$$

如下：设 $\mathscr{U} = \{U_i\}$ 是 X 的一个开覆盖. 定义

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathscr{U}} : C^1(\mathscr{U}, \mathscr{F}) &\to C^1(\mathscr{U}, \mathscr{G}) \\ (f_{ij}) &\mapsto (\alpha(f_{ij})). \end{aligned}$$

则 $\alpha_{\mathscr{U}}: Z^1(\mathscr{U},\mathscr{F}) \to Z^1(\mathscr{U},\mathscr{G})$，$\alpha_{\mathscr{U}}: B^1(\mathscr{U},\mathscr{F}) \to B^1(\mathscr{U},\mathscr{G})$. 故 $\alpha_{\mathscr{U}}$ 可以诱导出

$$\tilde{\alpha}_{\mathscr{U}}: H^1(\mathscr{U},\mathscr{F}) \to H^1(\mathscr{U},\mathscr{G}).$$

其诱导出同态

$$\alpha^1: H^1(X,\mathscr{F}) \to H^1(X,\mathscr{G})$$

定义 1.6.6. 有短正则列 $0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{G} \xrightarrow{\beta} \mathscr{H} \to 0$. 定义连接同态 $\delta^*: \mathscr{H}(X) = H^0(X,\mathscr{H}) \to H^1(X,\mathscr{F})$ 如下：

设 $h \in \mathscr{H}(X)$，$\mathscr{G}_x \xrightarrow{\beta_x} \mathscr{H}_x$ 满，故存在开覆盖 $\mathscr{U} = \{U_i\}$ 以及 $g_i \in \mathscr{G}(U_i)$ 使得 $\beta(g_i) = h$ 于 U_i. 因为 $\beta(g_i - g_j) = h - h = 0$ 于 $U_i \cap U_j$，故由引理 *1.6.2*，存在 $f_{ij} \in \mathscr{F}(U_i \cap U_j)$ 使得 $\alpha(f_{ij}) = g_i - g_j$.

在 $U_i \cap U_j \cap U_k$ 上，$\alpha(f_{ij} + f_{jk} + f_{ki}) = 0$，由引理 *6.1*，有 $f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} = 0$，故 $(f_{ij}) \in Z^1(\mathscr{U},\mathscr{F})$. 定义 $\delta^* h := [(f_{ij})] \in H^1(X,\mathscr{F})$.

良定性，需要验证与开覆盖选取无关、与 g_i 的选取无关.

若 $g_i' \in \mathscr{G}(U_i), f_{ij}' \in \mathscr{F}(U_i \cap U_j)$ 使得 $\beta(g_i') = h, \alpha(f_{ij}') = g_i' - g_j'$. 因为 $\beta(g_i - g_i') = h - h = 0$，由引理 *6.2*，存在 $f_i \in \mathscr{F}(U_i)$ 使得 $\alpha(f_i) = g_i - g_i'$.

$$\alpha(f_{ij}) - \alpha(f_{ij}') = (g_i - g_j) - (g_i' - g_j') = \alpha(f_i) - \alpha(f_j),$$

推出 $f_{ij} - f_{ij}' - (f_i - f_j) \in Ker\ \alpha_{U_i \cap U_j} = \{0\}$，即有 $f_{ij} - f_{ij}' = f_i - f_j$，即 $[(f_{ij})] = [(f_{ij}')]$.

定理 1.6.1. 设 $0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{G} \xrightarrow{\beta} \mathscr{H} \to 0$ 正合，则有

$$0 \to H^0(X,\mathscr{F}) \xrightarrow{\alpha^0} H^0(X,\mathscr{G}) \xrightarrow{\beta^0} H^0(X,\mathscr{H}) \xrightarrow{\delta^*} H^1(X,\mathscr{F}) \xrightarrow{\alpha^1} H^1(X,\mathscr{G}) \xrightarrow{\beta^1} H^1(X,\mathscr{H}).$$

证明. 我们需要验证第三、四、五处的正合性.

1. $\mathrm{Im}\ \beta^0 \subset \mathrm{Ker}\ \delta^*$. 设 $g \in \mathscr{G}(X), h = \beta(g)$. 在 δ^* 的定义中取 $g_i = g|_{U_i}$，则 $\alpha(f_{ij}) = g_i - g_j = 0$，由 α 单，$f_{ij} = 0$，故 $\delta^* h = [(f_{ij})] = 0$，即 $h \in \mathrm{Ker}\ \delta^*$.

2. $\mathrm{Ker}\ \delta^* \subset \mathrm{Im}\ \beta^0$. 设 $h \in \mathrm{Ker}\ \delta^*$，设 $\delta^* h = [(f_{ij})] = 0$，则 $f_{ij} = f_i - f_j$，$f_i \in \mathscr{F}(U_i)$. 推出 $\alpha(f_{ij}) = \alpha(f_i) - \alpha(f_j)$，即 $g_i - g_j = \alpha(f_i) - \alpha(f_j)$，其中 $\beta(g_i) = h$，则 $g_i - \alpha(f_i) = g_j - \alpha(f_j)$ 于 $U_i \cap U_j$，故存在 $g \in \mathscr{G}(X)$ 使得 $g|_{U_i} = g_i - \alpha(f_i)$ 在 U_i 上，且 $\beta(g) = \beta(g_i) - \beta \circ \alpha(f_i) = h$ 于 U_i，$\forall i$. 则 $h \in \mathrm{Im}\ \beta^0$.

3. $\mathrm{Im}\ \delta^* \subset \mathrm{Ker}\ \alpha^1$. 设 $\delta^* h = [(f_{ij})]$. 因为 $\alpha(f_{ij}) = g_i - g_j$，所以 $\delta^* h \in \mathrm{Ker}\ \alpha^1$.

4. $\mathrm{Ker}\ \alpha^1 \subset Im\ \delta^*$. 设 $\xi \in \mathrm{Ker}\ \alpha^1, \xi = [(f_{ij})]$. 因为 $\alpha^1(\xi) = 0$，所以 $\alpha(\xi_{ij}) = g_i - g_j$，其中 $g_i \in \mathscr{G}(U_i)$. 推出 $0 = \beta \circ \alpha(f_{ij}) = \beta(g_i) - \beta(g_j)$ 于 $U_i \cap U_j$. 故存在 $h \in \mathscr{H}(X)$ 使得 $h|_{U_i} = \beta(g_i)$. 由 δ^* 定义，$\delta^* h = \xi$.

5. $\mathrm{Im}\ \alpha^1 \subset \mathrm{Ker}\ \beta^1$. 因为 $\mathscr{F}(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\alpha} \mathscr{G}(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\beta} \mathscr{H}(U_i \cap U_j)$ 正合

6. $\mathrm{Ker}\ \beta^1 \subset \mathrm{Im}\ \alpha^1$.

   设 $\eta = [(g_{ij})] \in \mathrm{Ker}\ \beta^1$，其中 $(g_{ij}) \in Z^1(\mathscr{U},\mathscr{G})$. 则 $\beta(g_{ij}) = h_i - h_j$，其中 $h_i \in \mathscr{H}(U_i)$.

对于任意 $x \in X$，存在 $\tau x \in I$，使得 $x \in U_{\tau x}$. 因为 $\beta_x : \mathscr{G}_x \to \mathscr{H}_x$ 是满射，所以存在邻域 $x \in V_x \subset U_{\tau x}$ 使得存在 $g_x \in \mathscr{G}(V_x)$ 使得 $\beta(g_x) = h_{\tau x}|_{V_x}$.

令 $\tilde{g}_{xy} := g_{\tau x, \tau y}|_{V_x \cap V_y}$. 考虑 $\mathscr{V} = \{V_x\}_{x \in X}$，因为 $\mathscr{V} < \mathscr{U}$，所以 $\eta = [(\tilde{g}_{xy})]$. 令 $\psi_{xy} := \tilde{g}_{xy} - g_x + g_y$，则 $\eta = [(\psi_{xy})]$ 且 $\psi_{xy} \in \mathrm{Ker}\ \beta$:

$$\beta(\psi_{xy}) = \beta(\tilde{g}_{xy}) - \beta(g_x) + \beta(g_y) = h_{\tau x} - h_{\tau y} - h_{\tau x} + h_{\tau y} = 0.$$

由引理 1.6.2，存在 $f_{xy} \in \mathscr{F}(V_x \cap V_y)$ 使得 $\alpha(f_{xy}) = \psi_{xy}$. 因为 $\psi_{xy} + \psi_{yz} + \psi_{zx} = 0$，所以 $\alpha(f_{xy} + f_{yz} + f_{zx}) = 0$，又 α 单，故 $f \in Z^1(\mathscr{V}, \mathscr{F})$，且 $\alpha^1\left([(f_{ij})]\right) = \eta$.

定理 1.6.2. 设 $0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{G} \xrightarrow{\beta} \mathscr{H} \to 0$ 正合，且 $H^1(X, \mathscr{G}) = 0$，则

$$H^1(X, \mathscr{F}) \cong \mathscr{H}(X)/\beta\left(\mathscr{G}(X)\right).$$

定理 1.6.3. *Dolbeault.* 设 X 是 *Riemann* 面，则

1. $H^1(X, \mathcal{O}) \cong \mathcal{E}^{(0,1)}(X)/d''\mathcal{E}(X)$.
2. $H^1(X, \Omega) \cong \mathcal{E}^2(X)/d\mathcal{E}^{(1,0)}(X)$.

证明. 由

$$0 \to \mathcal{O} \xrightarrow{\iota} \mathcal{E} \xrightarrow{d''} \mathcal{E}^{(0,1)} \to 0$$

正合及 $H^1(X, \mathcal{E}) = 0$.

由

$$0 \to \Omega \xrightarrow{\iota} \mathcal{E}^{(1,0)} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2 \to 0$$

正合及 $H^1(X, \mathcal{E}^{(1,0)}) = 0$.

定义 1.6.7. X 是 *Riemann* 面，称

$$Rh^1(X) := \frac{\mathrm{Ker}\left(d : \mathcal{E}^1 \to \mathcal{E}^2\right)}{\mathrm{Im}\left(d : \mathcal{E} \to \mathcal{E}^1\right)}$$

为一阶 *de Rham* 上同调群.

定理 1.6.4. *de Rham*

$$H^1(X, \mathbb{C}) \cong Rh^1(X).$$

证明.

$$0 \to \mathbb{C} \to \mathcal{E} \xrightarrow{d} \mathrm{Ker}(d : \mathcal{E}^1 \to \mathcal{E}^2) \to 0$$

正合，且 $H^1(X, \mathcal{E}) = 0$ 即得.

2 紧 Riemann 面

2.1 Riemann-Roch 定理

定义 2.1.1. X 是 *Riemann* 面，X 上一个除子 *(divisor)* 指一个映射 $D : X \to \mathbb{Z}$ 使得对于任意紧集 $K \subset X$，只有有限个 $x \in K$ 使得 $D(x) \neq 0$.

记 $\mathrm{Div}(X)$ 为 X 上除子全体，配以加法运算后，其为一个 *Abel* 群.

设 $D, D' \in \mathrm{Div}(X)$，定义 $D \leq D'$ 等价于 $\forall x \in X$, $D(x) \leq D'(x)$.

例子 2.1.1. 设 $0 \neq f \in \mathcal{M}(X)$，对 $x \in X$，定义

$$\mathrm{ord}_x f = \begin{cases} 0, & f(x) \neq 0 \text{且} f \in \mathcal{O}_x \\ k, & x\text{为}f\text{的}k\text{阶零点} \\ -k, & x\text{为}f\text{的}k\text{阶极点} \end{cases},$$

则 $x \mapsto \mathrm{ord}_x f \in \mathrm{Div}(X)$，记为 (f).

例子 2.1.2. 设 $0 \neq \omega \in \mathcal{M}^1(X)$，对于任意 $x \in X$，在 x 的某坐标邻域使得 $z(x) = 0$，$\omega = f dz$，定义 $\mathrm{ord}_x \omega := \mathrm{ord}_0 f$. 验证其与局部坐标选取无关.

则 $x \mapsto \mathrm{ord}_x \omega \in \mathrm{Div}(X)$，记为 (ω)，称为典范除子 *canonical divisor.*

设 $f, g \in \mathcal{M}(X) \backslash \{0\}$，$\omega \in \mathcal{M}^1(X) \backslash \{0\}$，则 $(f \cdot g) = (f) + (g)$，$(f \cdot \omega) = (f) + (\omega)$，$(\frac{1}{f}) = -(f)$.

定义 2.1.2. 称一个除子 $D \in \mathrm{Div}(X)$ 为一个主除子，若存在 $f \in \mathcal{M} \backslash \{0\}$ 使得 $D = (f)$.

对于 $D, D' \in \mathrm{Div}(X)$，则定义 $D \sim D'$ 当且仅当 $D - D'$ 是主除子.

例子 2.1.3. 设 $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{M}^1(X) \backslash \{0\}$，则 $(\omega_1) \sim (\omega_2)$.

设 $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$，设 $(U, z_U), (V, z_V)$ 是两个局部坐标. 设 $\omega = \begin{cases} f_U dz_U, & on\ U \\ f_V dz_V, & on\ V \end{cases}$，则 $f_U = f_V \cdot \frac{\partial z_V}{\partial z_U}$ 于 $U \cap V$.

设在局部坐标下，$\omega_1 = f_1 dz, \omega_2 = f_2 dz$，定义 $f := \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{f_1}{f_2} \in \mathcal{M} \backslash \{0\}$，则 $(\omega_1) - (\omega_2) = (f)$，进而 $(\omega_1) \sim (\omega_2)$.

定义 2.1.3. X 是紧 *Riemann* 面，定义映射

$$\begin{aligned} \deg : \mathrm{Div}(X) &\to \mathbb{Z} \\ D &\mapsto \deg D := \sum_{x \in X} D(x) \end{aligned}$$

称其为 D 的阶.

对于任意 $f \in \mathcal{M}(X) \backslash \{0\}$，则 $\# f^{-1}(0) = \# f^{-1}(\infty)$，则 $\deg(f) = 0$. 故若 $D \sim D'$，则 $\deg D = \deg D'$.

定义 2.1.4. 给定 $D \in \mathrm{Div}(X)$，$U \subset X$ 开集，定义

$$\mathcal{O}_D(U) := \{f \in \mathcal{M}(U) : \mathrm{ord}_x f \geq -D(x), \forall x \in U\}$$

配以通常的限制映射，其诱导出一个 X 上的层 $\mathcal{O}_D$.

命题 2.1.1. $\mathcal{O}_D$ 的基本性质.

1. 若 $D=0$，则 $\mathcal{O}_D=\mathcal{O}$.

2. 若 $D\sim D'$，则 $\mathcal{O}_D\cong\mathcal{O}_{D'}$.

证明. 2. 对于任意 $\psi\in\mathcal{M}(X)\backslash\{0\}$ 使得 $D-D'=(\psi)$. 定义同构

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_D(U)&\to\mathcal{O}_{D'}(U)\\ f&\mapsto f\cdot\psi\end{aligned}$$

$(f\cdot\psi)=(f)+(\psi)\geq -D+(\psi)=-D'$. 类似定义

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{D'}(U)&\to\mathcal{O}_D(U)\\ g&\mapsto g/\psi\end{aligned}$$

再验证即可.

定理 2.1.1. X 是紧 *Riemann* 面，$D\in\mathrm{Div}(X)$ 使得 $\deg D<0$，则 $H^0(X,\mathcal{O}_D)=0$.

证明. 假设存在 $f\in H^0(X,\mathcal{O}_D)\backslash\{0\}$，使得 $f\geq -D$. $0=\deg(f)\geq-\deg D>0$，矛盾.

定义 2.1.5. 固定 $p\in X$，对于 $U\subset X$ 开集，定义 $\mathbb{C}_p(U):=\begin{cases}\mathbb{C}, & p\in U\\ 0, & p\notin U\end{cases}$，其诱导出 X 上的一个层 $\mathbb{C}_p$，称其为一个摩天大楼层.

引理 2.1.1. *1.* $H^0(X,\mathbb{C}_p)\cong\mathbb{C}$. *2.* $H^1(X,\mathbb{C}_p)=0$.

证明. 1. $H^0(X,\mathbb{C}_p)\cong\mathbb{C}_p(X)=\mathbb{C}$.

2. 设 $\zeta=[(f_{ij})\in H^1(X,\mathbb{C}_p)]$，其中 $(f_{ij})\in Z^1(\mathscr{U},\mathbb{C}_p)$，$\mathscr{U}$ 是 X 的一个开覆盖. 取 $\mathscr{U}$ 的一个加细 $\mathscr{V}=\{V_\alpha\}$ 使得只有一个 $V_\alpha\ni p$，即 $p\notin V_\alpha\cap V_\beta$，$\forall\beta\neq\alpha$. 即得 $\zeta=0$.

定义 2.1.6. 设 $p\in X$，定义单点除子 P 为在 p 点取值为 1，在其它点取值为 0 的除子.

对于任意 $D\in\mathrm{Div}(X)$，有 $D\leq D+P$，故存在包含同态 $\iota:\mathcal{O}_D\to\mathcal{O}_{D+P}$ 是一个层同态.

取复坐标 z 使得 $z(p)=0$，定义层同态 $\beta:\mathcal{O}_{D+P}\to\mathbb{C}_p$ 如下

设 $U\subset X$ 是开集，若 $p\notin U$，则定义 $\beta_U:=0$. 若 $p\in U$，则对于任意 $f\in\mathcal{O}_{D+P}(U)$，在 p 的某邻域有 Laurant 展开 $f(z)=\sum\limits_{n=-k-1}^{\infty}c_n\cdot z^n$，其中 $k=D(p)$. 此时，定义 $\beta_U(f):=c_{-k-1}\in\mathbb{C}=\mathbb{C}_p(U)$.

则

$$0\to\mathcal{O}_D\xrightarrow{\iota}\mathcal{O}_{D+P}\xrightarrow{\beta}\mathbb{C}_p\to 0$$

正合. 进而有长正合列

$$0\to H^0(X,\mathcal{O}_D)\to H^0(X,\mathcal{O}_{D+P})\to\mathbb{C}\to H^1(X,\mathcal{O}_D)\to H^1(X,\mathcal{O}_{D+P})\to 0.$$

定理 2.1.2. *Riemann-Roch* 定理.

X 是紧 *Riemann* 面, $D\in \mathrm{Div}(X)$, g 是 X 的亏格,则 $\dim H^0(X,\mathcal{O}_D)$ 和 $\dim H^1(X,\mathcal{O}_D)$ 有限,且

$$\dim H^0(X,\mathcal{O}_D)-\dim H^1(X,\mathcal{O}_D)=1-g+\deg D.$$

证明. 当 $D=0$ 时, $H^0(X,\mathcal{O})\cong\mathbb{C}$, 故 $\dim H^0(X,\mathcal{O})=1$, 而 $g=\dim H^1(X,\mathcal{O})$, $\deg D=0$.

设 $D\in\mathrm{Div}(X)$, $p\in X$, 令 $D'=D+P$. 有长正合列

$$0\to H^0(X,\mathcal{O}_D)\to H^0(X,\mathcal{O}_{D'})\to\mathbb{C}\to H^1(X,\mathcal{O}_D)\to H^1(X,\mathcal{O}_{D'})\to 0.$$

令 $V:=\mathrm{Im}(H^0(X,\mathcal{O}_{D'})\to\mathbb{C})$, $W=\mathbb{C}/V$. 则 $\dim V+\dim W=1=\deg D'-\deg D$. 于是有两个短正合列

$$0\to H^0(X,\mathcal{O}_D)\to H^0(X,\mathcal{O}_{D'})\to V\to 0,$$

$$0\to W\to H^1(X,\mathcal{O}_D)\to H^1(X,\mathcal{O}_{D'})\to 0.$$

于是,

$$\dim H^0(X,\mathcal{O}_{D'})=\dim H^0(X,\mathcal{O}_D)+\dim V,$$

$$\dim H^1(X,\mathcal{O}_D)=\dim H^1(X,\mathcal{O}_{D'})+\dim W.$$

由于任何除子 $D=P_1+\cdots+P_m-Q_1-\cdots-Q_n$, 且 $\dim H^0(X,\mathcal{O}),\dim H^1(X,\mathcal{O})$ 有限, 所以 $\dim H^0(X,\mathcal{O}_D),\dim H^1(X,\mathcal{O}_D)$ 有限. 有

$$\dim H^0(X,\mathcal{O}_{D'})+\dim H^1(X,\mathcal{O}_D)=\dim H^0(X,\mathcal{O}_D)+\dim H^1(X,\mathcal{O}_{D'})+\deg D'-\deg D,$$

则

$$\dim H^0(X,\mathcal{O}_{D'})-\dim H^1(X,\mathcal{O}_{D'})-\deg D'=\dim H^0(X,\mathcal{O}_D)-\dim H^1(X,\mathcal{O}_D)-\deg D,$$

于是若 Riemann-Roch 定理对 D,D' 中一个成立, 则对另一个也成立.

由于任何一个 $D\in\mathrm{Div}(X)$ 可写为 $P_1+\cdots+P_m-Q_1-\cdots-Q_n$, 故再由数学归纳法即得.

定理 2.1.3. 设 X 是亏格为 g 的紧 *Riemann* 面, 设 $a\in X$, 则存在 $f\in\mathcal{M}(X)$ 使得 $f\in\mathcal{O}(X\backslash\{a\})$ 且 a 为 f 的极点且其阶不超过 $g+1$.

证明. 取 $D\in\mathrm{Div}(X)$ 如下, $D(X)=\begin{cases}g+1, & x=a\\ 0, & x\neq a\end{cases}$. 由 Riemann-Roch 定理,

$$\dim H^0(X,\mathcal{O}_D)\geq 1-g+\deg D=1-g+g+1=2.$$

故存在非常值函数 $f\in H^0(X,\mathcal{O}_D)$ 其满足要求.

推论 2.1.1. X 是紧 *Riemann* 面, g 是亏格, 则存在分歧全纯覆盖 $f:X\to\mathbb{P}^1$, 其叶数不超过 $g+1$.

证明. 取 f 如上一个定理, 其定义了全纯映射 $X\to\mathbb{P}^1$, 其在 ∞ 的重数不超过 $g+1$.

推论 2.1.2. 亏格为 0 的紧 *Riemann* 面 $\cong\mathbb{P}^1$. (双全纯等价)

证明. 由上一个推论知叶数为 1, 而叶数为 1 的覆盖映射必双全纯.

2.2 Serre 对偶定理

此节假设 X 是紧 Riemann 面.

定义 2.2.1. 若 $D \in \mathrm{Div}(X)$，对 $U \subset X$ 开集，定义

$$\Omega_D(U) = \{\omega \in \mathcal{M}^1(U) : (\omega) \geq -D \text{ 于 } U\},$$

诱导出层 Ω_D.

定理 2.2.1. *Serre 对偶定理.*

$$H^1(X, \mathcal{O}_D) \cong H^0(X, \Omega_{-D})$$

$$H^1(X, \Omega_D) \cong H^0(X, \mathcal{O}_{-D})$$

注 2.2.1. *1.* 当 $D = 0$ 时，$\dim H^0(X, \Omega) = \dim H^1(X, \mathcal{O}) = g$.

2. 设 K 是典范除子，$\Omega_{-K} \cong \mathcal{O}$，$\Omega \cong \mathcal{O}_K$.

证明. 设 $K = (\omega)$，对 $\omega_1 \in \Omega_{-K}(U)$，则 $(\omega_1) \geq K = (\omega)$，则 $f = \omega_1/\omega \in \mathcal{O}(U)$，这定义了一个从 $\Omega_{-k}(U)$ 到 $\mathcal{O}(U)$ 的同构.

注 2.2.2. *R. Narasinhan, Compact Riemannian Surfaces.*

定理 2.2.2. 设 $\omega \in \mathcal{M}^1(X)\backslash\{0\}$，则 $\deg(\omega) = 2g - 2$. 特别地，若 $\omega \in \Omega(X)\backslash\{0\}$，则其零点个数为 $2g - 2$.

证明. 设 $K = (\omega)$，由 Riemann-Roch 定理，$\dim H^0(X, \mathcal{O}_K) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_K) = 1 - g + \deg K$，而

$$\mathrm{LHS} = \dim H^1(X, \Omega_{-K}) - \dim H^0(X, \Omega_{-K}) = \dim H^1(X, \mathcal{O}) - \dim H^0(X, \mathcal{O}) = g - 1,$$

故 $\deg K = 2g - 2$.

推论 2.2.1. 环面 $\mathbb{C}/\Gamma$ 的亏格为 1.

证明. dz 关于 Γ 不变, 其诱导出 $\mathbb{C}/\Gamma$ 上的一个全纯 1-形式 ω, 其无零点, 进而 $0 = \deg \omega = 2g - 2$ 推出 $g = 1$.

定理 2.2.3. 若 $g \geq 1$，则对于任意 $p \in X$，存在 $\omega \in \Omega(X)$ 使得 $\omega|_p \neq 0$.

证明. 因为 X 不同构于 $\mathbb{P}^1$，所以 $\dim H^0(X, \mathcal{O}_P) = 1$（否则存在非常值 $f \in H^0(X, \mathcal{O}_P)$ 且 $(f) \geq -P$ 推出 $X \cong \mathbb{P}^1$，矛盾.）

由 Serre 对偶，$\dim H^1(X, \Omega_{-P}) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_P) = 1$，由 Riemann-Roch 定理，

$$\dim H^0(X, \Omega_{-P}) = \dim H^1(X, \Omega_{-P}) + 1 - g + \deg K - 1 = g - 1 = \dim H^0(X, \Omega) - 1,$$

推出存在 $\omega \in H^0(X, \Omega)\backslash H^0(X, \Omega_{-P})$，则 $\omega|_p \neq 0$.

定理 2.2.4. $D \in \mathrm{Div}(X)$，$\deg D > 2g - 2$，则 $H^1(X, \mathcal{O}_D) = 0$.

证明. 取 K 为典范除子,

$$\begin{aligned}\dim H^1(X,\mathcal{O}_D) &= \dim H^0(X,\Omega_{-D})(Serre)\\ &= \dim H^0(X,\mathcal{O}_{K-D})\\ &= 0\end{aligned}$$

因为 $\deg(K-D) = 2g-2-\deg D < 0$.

注 2.2.3. *多元的情形即为 Kodaira 消灭定理.*

推论 2.2.2. $H^1(X,\mathcal{M}) = 0$.

证明. 设 $\xi = [(f_{ij})] \in H^1(X,\mathcal{M})$, 其中 $(f_{ij}) \in Z^1(\mathscr{U},\mathcal{M})$, $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖.

取 $\mathscr{V} = \{V_i\} << \mathscr{U} = \{U_i\}, i = 1,2,\cdots,n$. 因为 $\overline{V_i} \cap \overline{V_j} \subset U_i \cap U_j$, 所以存在 $D \in \mathrm{Div}(X)$ 使得 $\deg D > 2g-2$ 且 $(f_{ij}) \geq -D$ 于 $\overline{V_i} \cap \overline{V_j}$. 推出 $(f_{ij}|_{V_i \cap V_j}) \in Z^1(\mathscr{V},\mathcal{O}_D)$.

因为 $H^1(\mathscr{V},\mathcal{O}_D) = 0$, 所以 $f_{ij} = f_i - f_j$ 于 $V_i \cap V_j$, 其中 $f_i \in C^0(V_i,\mathcal{O}_D) \subset C^0(V_i,\mathcal{M})$, 故 $\xi = 0$.

定义 2.2.2. *设 $D \in \mathrm{Div}(X)$, 称 $\mathcal{O}_D$ 为整体生成的, 若 $\forall x \in X$, 存在 $f \in H^0(X,\mathcal{O}_D)$ 使得 $\mathrm{ord}_x f = -D(x)$.*

定理 2.2.5. *若 $\deg D \geq 2g$ 则 $\mathcal{O}_D$ 是整体生成的.*

证明. 令 $D'(y) := \begin{cases} D(y), & y \neq x \\ D(x)-1, & y = x \end{cases}$. 则 $D' \in \mathrm{Div}(X)$ 使得 $\deg D' = \deg D - 1 \geq 2g-1 > 2g-2$. 推出 $H^1(X,\mathcal{O}_D) = H^1(X,\mathcal{O}_{D'}) = 0$.

由 Riemann-Roch 定理, $\dim H^0(X,\mathcal{O}_D) > \dim H^0(X,\mathcal{O}_{D'})$.

因为 $H^0(X,\mathcal{O}_{D'}) \subset H^0(X,\mathcal{O}_D)((f) \geq -D' \geq -D)$, 所以只需取 $f \in H^0(X,\mathcal{O}_D) \backslash H^0(X,\mathcal{O}_{D'})$.

定义 2.2.3. *N 维复射影空间 $\mathbb{P}^N$.*

令 $\mathbb{P}^N := \mathbb{C}^{N+1}/\sim$, 其中 $(z_0,\cdots,z_N) \sim (z_0',\cdots,z_N')$ 等价于存在 $\lambda \in \mathbb{C}^*$ 使得 $z_j' = \lambda \cdot z_j, 0 \leq j \leq N$.

设 $[z_0;z_1;\cdots;z_N]$ 为由 $(z_0,\cdots,z_N)$ 所代表的等价类. 令 $U_j := \{[z_0;\cdots;z_N] : z_j \neq 0\}$, 则 $\{U_j\}_{j=0}^N$ 是一个开覆盖. 考虑同胚 $\varphi_j : U_j \to \mathbb{C}^n, [z_0;\cdots;z_N] \mapsto (\frac{z_0}{z_j},\cdots,\frac{z_{j-1}}{z_j},\frac{z_{j+1}}{z_j},\cdots,\frac{z_N}{z_j})$ 为一个复坐标.

定义 2.2.4. *X 是紧 Riemann 面, $F \in C(X,\mathbb{P}^N)$, 则 $\{W_j := F^{-1}(U_j)\}$ 构成 X 的开覆盖. 令 $F_j := \varphi_j \circ F : W_j \to \mathbb{C}^N$, 记 $F_j = (F_{j1},\cdots,F_{jN})$, 若 $\forall F_{j\nu}$ 全纯, 则称 F_j 为全纯映射. 如果 $\forall x \in X$, 存在 $W_j \ni x$, 且存在 ν 使得 $dF_{j\nu}|_x \neq 0$, 则称 F 是全纯浸入. 称 F 为全纯嵌入, 若 F 是全纯浸入且 F 是单射.*

设 $f_0,\cdots,f_N \in \mathcal{M}\backslash\{0\}$, 则构造全纯映射 $F := [f_0 : f_1 : \cdots : f_N] : X \to \mathbb{P}^N$ 如下:

对于任意 $x \in X$, 取坐标 z 使得 $z(x) = 0$. 令 $k = \min\limits_{0 \leq j \leq N} \mathrm{ord}_x f_j$. 则 $f_j = z^k \cdot g_j, g_j \in \mathcal{O}_x$, 且至少有一个 $g_j(x) \neq 0$. 则令 $F(x) := [g_0(x) : g_1(x) : \cdots : g_N(x)]$. 而

$$F_j = (\frac{g_0}{g_j},\cdots,\frac{g_{j-1}}{g_j},\frac{g_{j+1}}{g_j},\cdots,\frac{g_N}{g_j}) \in \mathcal{O}_x^{\oplus N}.$$

定理 2.2.6. 设 $D \in \mathrm{Div}(X)$ 使得 $\deg D \geq 2g+1$，设 $f_0, \cdots, f_N \in H^0(X, \mathcal{O}_D)$ 的一组基，则

$$F : [f_0 : f_1 : \cdots : f_N] : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$$

为一个全纯嵌入.

注 2.2.4. 多复变

若 X 是非紧的 *Riemann* 面，则 X 可以作为闭一维复子流形全纯嵌入到 $\mathbb{C}^3$ 中.

证明. 我们只需证明 F 是单浸入.

1. F 是单射.

   作 $D' \in \mathrm{Div}(X)$ 如下：$D'(x) = \begin{cases} D(X), & x \neq x_2 \\ D(x_2) - 1, & x = x_2 \end{cases}$. 因为 $\deg D' = \deg D - 1 \geq 2g$，所以 $\mathcal{O}_{D'}$ 是整体生成的. 于是存在 $f \in H^0(X, \mathcal{O}_{D'})$ 使得

   $$\mathrm{ord}_{x_1} f = -D'(x_1) = -D(x_1).$$

   显然

   $$\mathrm{ord}_{x_2} f \geq -D'(x_2) = -D(x_2) + 1.$$

   因为 $H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) \subset H^0(X, \mathcal{O}_D)$，所以 $f = \sum\limits_{j=0}^{N} \lambda_j f_j, \lambda_j \in \mathbb{C}$.

   取 x_1, x_2 处的坐标 $(V_1, z_1), (V_2, z_2)$ 使得 $z_1(x_1) = z_2(x_2) = 0$. 因为 $\mathcal{O}_D$ 是整体生成的，$k_\mu := \min_j \mathrm{ord}_{x_\mu} f_j = -D(x_\mu), \mu = 1, 2$.

   在 x_μ 附近，$f_j = z_\mu^{k_\mu} \cdot g_{\mu j}$，$f = z_\mu^{k_\mu} \cdot g$, 其中 $g_{\mu j}, g \in \mathcal{O}_{x_\mu}, \mu = 1, 2$. 推出 $F(x_\mu) = [g_{\mu 0} : g_{\mu 1} : \cdots : g_{\mu N}]$ 且 $\sum\limits_{j=0}^{N} \lambda_j g_{\mu j}(x_\mu) = g(x_\mu), \mu = 1, 2$.

   由 $\mathrm{ord}_{x_1} f = -D'(x_1) = -D(x_1)$ 推出 $g(x_1) \neq 0$，由 $\mathrm{ord}_{x_2} f \geq -D'(x_2) = -D(x_2) + 1$ 推出 $g(x_2) = 0$. 则 $F(x_1) \neq F(x_2)$. 若否，则存在 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $g_{\mu j}(x_1) = g_{\mu j}(x_2) \cdot \lambda$. 则

   $$0 \neq g(x_1) = \sum_{j=0}^{N} \lambda_j g_{\mu j}(x_1) = \lambda \cdot \sum_{j=0}^{N} \lambda_j g_{\mu j}(x_2) = \lambda \cdot g(x_2) = 0,$$

   得到矛盾.

2. F 是浸入.

   设 $x_0 \in X$，取 $D' \in \mathrm{Div}(X)$ 如下：$D'(x) = \begin{cases} D(X), & x \neq x_0 \\ D(x_0) - 1, & x = x_0 \end{cases}$. 取 $f \in H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) \subset H^0(X, \mathcal{O}_D)$ 使得

   $$\mathrm{ord}_{x_0} f = -D'(x_0) = -D(x) + 1.$$

设 $f=\sum\limits_{j=0}^{N}\lambda_j f_j$. 取 $k=\min_j \operatorname{ord}_{x_0} f_j=-D(x_0)$ 使得取 x_0 处复坐标 z 使得 $f_j=z^k\cdot g_j, f=z^k\cdot g$, 其中 $g_i,g\in\mathcal{O}_{x_0}$. 不妨设 $g_0(x_0)\neq 0$. 则 $F_0:=\varphi_0\cdot F: W_0=F^{-1}(U_0)\to\mathbb{C}^N$,

$$F_0=(F_{01},\cdots,F_{0N})=(\frac{g_1}{g_0},\cdots,\frac{g_N}{g_0}).$$

$$\sum_{j=1}^{N}\lambda_j F_{0j}=\sum_{j=1}^{N}\frac{\lambda_j g_j}{g_0}=\frac{g}{g_0}-\lambda_0$$

推出

$$\sum_{j=1}^{N}\lambda_j dF_{oj}(x_0)=d(\frac{g}{g_0})(x_0).$$

因为 $g(x_0)\neq 0$, 且 $\operatorname{ord}_{x_0} f=-D'(x_0)=-D(x)+1$ 推出 $\operatorname{ord}_{x_0}=1$. 所以

$$d(\frac{g}{g_0})(x_0)=\frac{dg(x_0)}{g_0(x_0)}-\frac{g(x_0)\cdot dg_0(x_0)}{g_0(x_0)^2}=\frac{dg(x_0)}{g(x_0)}\neq 0$$

故存在某个 j 使得 $dF_{0j}(x_0)\neq 0$，故 F 是浸入.

注 2.2.5. $N+1=\dim H^0(X,\mathcal{O}_D)=1-g+\deg\ D\geq g+2$，因此 $X\hookrightarrow\mathbb{P}^{g+1}$，其中 g 是 X 的亏格. 特别地，$\mathbb{C}/\Gamma\hookrightarrow\mathbb{P}^2$. 一般地，任意紧 *Riemann* 面 $X\hookrightarrow\mathbb{P}^3$.

注 2.2.6. 若 X 是非紧 *Riemann* 面，则存在逆紧全纯嵌入 $X\hookrightarrow\mathbb{C}^3$*(Bishop-Narasimhan-Remmert)*.

Conjecture: 存在逆紧全纯嵌入 $X\hookrightarrow\mathbb{C}^2$.

定义 2.2.5. X,Y 是紧 *Riemann* 面，非常值映射 $F\in\mathcal{O}(X,Y)$. 令 f 在 x 处的重数 $\nu(f,x):=\#(f^{-1}(y)\cap U)$，这里 $U\ni x$ 是充分小邻域，$y\neq f(x)$ 但充分接近于 $f(x)$.

称 $b(f,x)=\nu(f,x)-1$ 为 f 在 x 处的分歧阶 *(*分歧：*branch)*. 令 $b:=\sum\limits_{x\in X}b(f,x)$.

称 $n:=\sum\limits_{x\in f^{-1}(y)}\nu(f,x)$ 为 f 的叶数. g 和 g' 分别是 X 和 Y 的亏格.

定理 2.2.7. *Riemann-Hurwitz* 定理.

$$g=\frac{b}{2}+n(g'-1)+1.$$

注 2.2.7. 推出 b 是偶数.

证明. 设 $\omega\in\mathcal{M}^1(Y)\backslash\{0\}$, 由 Riemann Roch 定理, $\deg\omega=2g'-2$. 而 $f^*\omega\in\mathcal{M}^1(X)\backslash\{0\}$, 再由 Riemann-Roch 定理，$\deg f^*\omega=2g-2$.

设 $x\in X$，$y=f(x)\in Y$. 取 x,y 处的坐标 z,w 使得 $z(x)=w(y)=0$，且 f 可表示为 $w=z^k$，$k=\nu(f,x)$. 设 $\omega=\psi(w)dw$，则 $f^*\omega=\psi(z^k)dz^k=kz^{k-1}\psi(z^k)dz$. 于是有

$$\operatorname{ord}_x f^*\omega=b(f,x)+\nu(f,x)\cdot\operatorname{ord}_y\omega.$$

推出

$$\sum_{x\in f^{-1}(y)}\operatorname{ord}_x f^*\omega=\sum_{x\in f^{-1}(y)}b(f,x)+n\cdot\operatorname{ord}_y\omega.$$

故

$$\begin{aligned}\deg f^*\omega &= \sum_{x\in X}\operatorname{ord}_x f^*\omega\\ &= \sum_{y\in Y}\sum_{x\in f^{-1}(y)}\operatorname{ord}_x f^*\omega\\ &= \sum_{y\in Y}\sum_{x\in f^{-1}(y)} b(f,x) + n\sum_{y\in Y}\operatorname{ord}_y \omega\\ &= b + n\cdot\deg\omega.\end{aligned}$$

例子 2.2.1. 当 $Y=\mathbb{P}^1$ 时，则 $g=\frac{b}{2}-n+1$.

特别地，当 $n=2$ 时，$g=\frac{b}{2}-1$，此时称 X 为超椭圆的.

2.3 除子与线丛，Serre 定理证明

定义 2.3.1. X 是 *Riemann* 面, X 上一个全纯线丛指 $L=\bigcup\limits_{i\in I}U_i\times\mathbb{C}/\sim$, 其中 $\mathscr{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ 为 X 的一个开覆盖，$(x,v)\in U_i\times\mathbb{C}\sim(y,w)\in U_j\times\mathbb{C}$ 等价于 $x=y$ 且 $v=g_{ij}(x)\cdot w$，其中 $g_{ij}\in\mathcal{O}^*(U_i\cap U_j)$ 满足 $g_{ij}\cdot g_{jk}=g_{ik}$ 于 $U_i\cap U_j\cap U_k$. 称 $\{g_{ij}\}$ 为 L 的转换函数.

定义 2.3.2. 设 $U\subset X$ 为开集，L 在 U 上的一个全纯截影指一族 $(f_i)_{i\in I}$，其中 $f_i\in\mathcal{O}(U\cap U_i)$ 使得 $f_i=g_{ij}\cdot f_j$ 于 $U\cap U_i\cap U_j$. 记 $\Gamma(U,L)=\{L$ 在 U 上的全纯截影 $\}$. 其诱导出一个层，记为 $\mathcal{O}_L$.

定义 2.3.3. L 在 U 上的一个亚纯截影指一个 $f\in\Gamma(X',L)$，其中 $X'\subset X$ 开，满足

1. $X\backslash X'$ 离散.

2. $\forall a\in X\backslash X'$，存在 a 处坐标 (U,z) 使得 $z(a)=0$ 且存在 $n\in\mathbb{Z}^+$ 使得 $z^n\cdot f\in\Gamma(U,L)$.

例子 2.3.1. 一些例子.

1. 平凡线丛 $L=X\times\mathbb{C}$. 此时 $g_{ij}=1$，$\mathcal{O}=\mathcal{O}_L$.

2. 设 $\{(U_i,z_i)\}_{i\in I}$ 为 X 的一个坐标邻域覆盖. 定义 $g_{ij}:=\frac{dz_j}{dz_i}$，称以 $\{g_{ij}\}$ 为转换函数诱导的全纯线丛为 X 上的典范线丛 K_X（即为 X 上的全纯余切丛）.

3. L,L' 为 X 上全纯线丛，转换函数 $\{g_{ij}\},\{g'_{kl}\}$，取一个公共加细覆盖后，不妨设转换函数为 $\{g_{ij}\}$ 于 $\{g'_{ij}\}$，称以 $\{g_{ij}\cdot g'_{ij}\}$ 为转移函数诱导出的全纯线丛为 L 与 L' 的张量积，记为 $L\otimes L'$.

记 $L^{\otimes m}=L\otimes L\otimes\cdots\otimes L$ 共 m 个做张量积. 称 $K^{\otimes m}$ 为 *pluri-canonical line bundle*, $P_m:=\Gamma(X,K^{\otimes m})$ 为 *pluri-genera.*

4. 设 L 的转换函数为 $\{g_{ij}\}$，以 $\{g_{ij}^{-1}\}$ 为转移函数诱导出的全纯线丛为 L 的对偶线丛.

5. 设 $D\in Div(X)$，取 X 的开覆盖 $\mathscr{U}=\{U_i\}_{i\in I}$，以及 $\psi_i\in\mathcal{M}(U_i)$, $i\in I$ 使得 $(\psi_i)=D$ 于 U_i. 则 $g_{ij}:=\psi_i/\psi_j\in\mathcal{O}^*(U_i\cap U_j)$. 记 L_D 为以 $\{g_{ij}\}$ 为转换函数的全纯线丛.

引理 2.3.1.

$$\mathcal{O}_D\cong\mathcal{O}_{L_D}.$$

证明. 设 $U\subset X$ 为一个开集，$f\in\mathcal{O}_D(U)$ 则 $(f)\geq -D$ 于 U. 故 $f_i:=f\cdot\psi_i\in\mathcal{O}(U\cap U_i)$. $((f_i)=f(f)+(\psi_i)\geq -D+(\psi_i)=0.)$

在 $U\cap U_i\cap U_j$ 上，$\frac{f_i}{\psi_i}=f=\frac{f_j}{\psi_j}$ 推出 $f_i=g_{ij}f_j$，推出 $(f_i)\in\Gamma(U,L_D)$.

反过来，设 $(f_i)\in\Gamma(U,L_D)$，在 $U\cap U_i\cap U_j$ 上，$f_i=g_{ij}f_j$，则 $\frac{f_i}{\psi_i}=\frac{f_j}{\psi_j}$，推出 $f|_{U\cap U_i}:=\frac{f_i}{\psi_i}\in\mathcal{M}(U)$，且使得 $(f)=(f_i)-(\psi_i)\geq(-\psi_i)=-D$, $\forall U\cap U_i$，则 $f\in\mathcal{O}_D(U)$.

定义 2.3.4. 设 L 是 X 上的全纯线丛，记 $\pi:L\to X$，$[(x,v)]\mapsto x$ 为自然投影. 商映射 $\bigcup\limits_{i\in I}U_i\times\mathbb{C}\to L$ 诱导出同胚 $\Phi_i:\pi^{-1}(U_i)\to U_i\times\mathbb{C}$ 使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U_i) \arrow[r, "\Phi_i"] \arrow[d, "\pi"] & U_i\times\mathbb{C} \arrow[dl] \\
U_i &
\end{tikzcd}$$

称 Φ_i 为 L 在 U_i 上的平凡化. $\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}(x,v) = (x, g_{ij}(x)v)$ 是全纯的. 说明 L 为一个二维复流形.

称 $\xi_i := \Phi_i^{-1}(x,1)$ 为 L 在 U_j 上的一个局部标架. 则有 $\xi_j = g_{ij}\xi_i$.

设 $f = (f_i) \in \Gamma(U,L)$, $U \subset X$ 开, 则 $\tilde{f}|_{U\cap U_i} := f_i \times \xi_i \in \mathcal{O}(U,L)$. 我们将 f 与 $\tilde{f}$ 恒同起来（解释了为什么叫全纯截影）.

定义 2.3.5. L 上的一个 *Hermitian* 度量 h 指一族函数 $\{h_i\}$，其中 $0 < h_i \in \mathcal{E}(U_i)$ 使得 $h_i = h_j/|g_{ij}|^2$ 于 $U_i \cap U_j$.

设 $f \in \Gamma(U,L)$，$f = (f_i)$，其中 $f_i \in \mathcal{O}(U \cap U_i)$，有 $|f_i|^2 h_i = |f_j|^2 h_j$ 于 $U \cap U_i \cap U_j$. 定义 $|f|_h^2|_{U_i} := |f_i|^2 \cdot h_i \in \mathcal{E}(U)$，称其为 f 关于 h 的点态长度的平方.

定义 2.3.6. 因为 $d'd''(-\log h_i) = d'd''(-\log h_j)$ 于 $U_i \cap U_j$, 故定义 $\Theta|_{U_i} := id'd''(-\log h_i) \in \mathcal{E}^{(1,1)}(X)$ 称为 h 的曲率.

定义 2.3.7. 称 $C(L) := \frac{1}{2\pi}\int_X \Theta_h$ 为 L 的 *Euler* 示性数或第一陈类.

定理 2.3.1. *Gauss-Bonnet.*

X 是紧 *Riemann* 面，$D \in \mathrm{Div}(X)$，则 $C(L_D) = \deg D$.

证明. 取 X 的（有限）坐标邻域覆盖 $\mathscr{U} = \{(U_i, z_i)\}$ 以及 $\psi \in \mathcal{M}(U_i)$ 使得 $(\psi_i) = D$ 于 U_i. 于是有 $f = (\psi_i) \in \mathcal{M}(X, L_D)$.

设 $D = \sum\limits_{k=1}^{n} n_k \cdot P_k$，$n_k \in \mathbb{Z}$, $P_k \in X$. 令 $X' = X\backslash\{P_1, \cdots, P_n\}$ 则 $f \in \Gamma(X', L_D)$ 且无零点. 则 $\Theta_h = id'd''(-\log|f|_h^2)$ 于 X'. 所以

$$C(L_D) = \frac{1}{2\pi}\int_{X'} \Theta_h = \frac{1}{2\pi}\int_{X'} id'd''(-\log|f|_h^2).$$

设 z_k 为 P_k 处坐标使得 $z_k(P_k) = 0$. 则 ξ_k 为 L 在 P_k 附近的一个局部标架.

设 $f = z_k^{n_k} \cdot g_k \otimes \xi_k$ 于 P_k 附近，$g_k \in \mathcal{O}_{P_k}^*$，推出

$$\begin{aligned}
C(L_D) &= \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{2\pi}\int_{X\backslash\bigcup_{k=1}^n \{|z_k|<\delta\}} idd' \log|f|_h^2 \\
&= \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\int_{|z_k|=\delta} d'\log|f|_h^2 \\
&= \lim_{\delta\to 0} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z_k|=\delta} (n_k\frac{dz_k}{z_k} + d'\log|g_k\otimes\xi_k|_h^2) \\
&= \sum_{k=1}^{n} n_k = \deg D.
\end{aligned}$$

注 2.3.1. 设 $g = \lambda^2 dz \otimes d\bar{z}$ 为 X 上一个 *Riemann* 度量，其可以看作 X 的全纯切丛 K^* 上的一个 *Hermitian* 度量. 记 $\omega_g := \frac{i}{2}\lambda^2 dz \wedge d\bar{z}$ 为 g 的 *Kähler* 形式. 称 $K_g := -\frac{2}{\lambda^2}\frac{\partial \log\lambda^2}{\partial z\partial\bar{z}}$ 为 g 的 *Gauss* 曲率. 则 $\Theta_g = K_g \cdot \omega_g$. 则由上条定理推出

$$\frac{1}{2\pi}\int_X K_g \cdot \omega_g = -\deg K = 2 - 2g = \chi(X).$$

其中 K 是 *Canonical divisor*，g 是 X 的“柄”的个数，$\chi(X)$ 是 X 的 *Euler* 示性数.

定义 2.3.8. X 是 *Riemann* 面，L 是 X 上的全纯线丛，$U \subset X$ 开，与全纯截影类似可定义 C^∞ 截影，令

$$\mathcal{E}_L(U) := \{L\text{在}U\text{上的}C^\infty\text{截影}\},$$

$$\mathcal{E}_L^{(0,1)}(U) := \mathcal{E}^{(0,1)}(U) \otimes \mathcal{E}_L(U).$$

$\{\mathcal{E}_L(U)\}, \{\mathcal{E}_L^{(0,1)}(U)\}$ 诱导出层 $\mathcal{E}_L$ 和 $\mathcal{E}_L^{(0,1)}$.

定义 2.3.9. 引入层同态 $d'' : \mathcal{E}_L \to \mathcal{E}_L^{(0,1)}$，设 $U \subset X$ 开，$\mathscr{U} = \{U_i\}$ 为 X 的开覆盖使得 L_{U_i} 平凡.

设 $S \in \mathcal{E}_L(U)$，则 $S = f_i \otimes \xi_i$ 于 $U \cap U_i$，$f_i \in \mathcal{E}(U_i \cap U)$. 定义 $d''S|_{U\cap U_i} := d'' f_i \otimes \xi_i$. 则 $d''S \in \mathcal{E}_L^{(0,1)}(U)$: $f_i \otimes \xi_i = f_j \otimes \xi_j$ 于 $U \cap U_i \cap U_j$, $f_i = g_{ij} f_j$，$\xi_i = g_{ij}^{-1} \xi_j$.

$$\begin{aligned} d'' f_i \otimes \xi_i &= d''(g_{ij} f_j) \otimes (g_{ij}^{-1} \xi_j) \\ &= g_{ij} d'' f_j \otimes (g_{ij}^{-1} \xi_j) \\ &= d'' f_j \otimes \xi_j. \end{aligned}$$

注 2.3.2. 无法定义 $d' : \mathcal{E}_L \to \mathcal{E}_L^{(1,0)}$.

令 $H^0(X, L) := H^0(X, \mathcal{O}_L)$, $H^1(X, L) := H^1(X, \mathcal{O}_L)$. 则有

定理 2.3.2. *Dolbeault* 定理

$H^1(X, L) \cong \mathcal{E}_L^{(0,1)}(X)/d''\mathcal{E}_L(X)$.

定义 2.3.10. 设 L 是 X 上的全纯线丛，L^* 是 L 的对偶丛，K 是 X 上的典范线丛，定义双线性形式 $\langle , \rangle : H^0(X, K \otimes L^*) \times \mathcal{E}_L^{(0,1)}(X) \to \mathbb{C}$ 如下

设 ξ 为 L 的一个局部标架，则 $\xi^* := \xi^{-1}$ 为 L^* 的一个局部标架，则对于任意 $S \in H^0(X, K \times L^*)$ 以及对于任意 $\varphi \in \mathcal{E}_L^{(0,1)}(X)$，可局部表示为

$$S = f dz \otimes \xi^*, f \in \mathcal{O}(U)$$

$$\varphi = g d\bar{z} \otimes \xi, g \in \mathcal{E}(U)$$

定义 $(S, \varphi)|_U := f \cdot g dz \wedge d\bar{z}$，其不依赖于 U 以及标架的选取，故 $(S, \varphi) \in \mathcal{E}^{(1,1)}(X)$，则定义 $\langle S, \varphi \rangle := \int_X (S, \varphi)$.

定理 2.3.3. 表示定理

X 是紧 *Riemann* 面, L 是 X 上的全纯线丛, $F : \mathcal{E}_L^{(0,1)} \to \mathbb{C}$ 是一个连续线性泛函, 使得 $F|_{d''\mathcal{E}_L(X)} = 0$ 可推出存在唯一的 $S \in H^0(X, K \otimes L^*)$ 使得 $F(\varphi) = \langle S, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{E}_L^{(0,1)}(X)$.

证明. (i). 设 $U \subset X$ 开，$\sigma \in H^0(U, K \otimes L^*)$ 使得 $\langle \sigma, \varphi \rangle = 0, \forall \varphi \in \mathcal{E}_L^{(0,1)}(X), \operatorname{Supp} \varphi \subset U$，则 $\sigma = 0$（定理的唯一性）

(ii). 设 U 为 X 的一个坐标邻域，使得 $L|_U$ 平凡，则存在 $S \in H^0(U, K \otimes L^*)$ 使得 $F(\varphi) = \langle S, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{E}_L^{(0,1)}(X)$ 且 $\operatorname{Supp} \varphi \subset U$.

假设 (ii) 成立，取 X 的坐标邻域覆盖 $\{(U_i, z_i)\}$ 使得 $L|_{U_i}$ 平凡，由 2，存在 $S_i \in H^0(U_i, K \otimes L^*)$ 使得 $F(\varphi) = \langle S_i, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{E}_L^{(0,1)}(X)$ 且 $\operatorname{Supp} \varphi \subset U_i$. 若 $\operatorname{Supp} \varphi \subset U_i \cap U_j$，则 $\langle S_i - S_j, \varphi \rangle = 0$, 由 (i) 推出 $S_i = S_j$ 于 $U_i \cap U_j$, 故定义 $S|_{U_i} := S_i$, 有 $S \in H^0(X, K \otimes L^*)$.

取 $\{\chi_i\}$ 为从属于 $\{U_i\}$ 的单位分解，对 $\varphi \in \mathcal{E}_L^{(0,1)}(X)$，令 $\varphi_i = \chi_i\varphi$，则 $\operatorname{Supp}\varphi_i \subset U_i$ 且 $\varphi = \sum_i \varphi_i$.

$$\langle S, \varphi\rangle = \sum\langle S, \varphi_i\rangle = \sum\langle S_i, \varphi_i\rangle = \sum F(\varphi_i) = F(\sum\varphi_i) = F(\varphi).$$

接下来我们证明 (ii) 成立. 设 $S = fdz \otimes \xi^*$，$\varphi = gd\overline{z} \otimes \xi$，则 $\langle S, \varphi\rangle = \int_U f \cdot gdz \wedge dOz$. 因此只需证明下面的 Weyl 引理.

设 $U \subset\subset \mathbb{C}$ 是有界区域，$T : C_0^\infty(U) \to \mathbb{C}$ 为一个线性映射，使得

1. 若 $f_j \in C_0^\infty(U)$ 按 C^∞ 拓扑收敛于 $f \in C_0^\infty(U)$, 则 $Tf_j \to Tf$;
2. $T(\partial g/\partial\overline{z}) = 0, \forall g \in C_0^\infty(U)$（即在分布意义下，$\overline{\partial}T = 0$）

则存在唯一的 $h \in \mathcal{O}(U)$，使得 $Tg = \int_U h \cdot gdz \wedge d\overline{z}$.

我们证明 Weyl 引理.

引理 2.3.2. *Weyl 引理.*

设 $U \subset\subset \mathbb{C}$ 是有界区域，$T : C_0^\infty(U) \to \mathbb{C}$ 为一个线性映射，使得

1. 若 $f_j \in C_0^\infty(U)$ 按 C^∞ 拓扑收敛于 $f \in C_0^\infty(U)$, 则 $Tf_j \to Tf$;

2. $T(\partial g/\partial\overline{z}) = 0, \forall g \in C_0^\infty(U)$（即在分布意义下，$\overline{\partial}T = 0$）

则存在唯一的 $h \in \mathcal{O}(U)$，使得 $Tg = \int_U h \cdot gdz \wedge d\overline{z}$.

引理的证明. $\forall\varepsilon > 0$, 定义 $U_\varepsilon := \{z \in U : d(z, \partial U) > \varepsilon\}$, 取 $\chi_\varepsilon \in C_0^\infty(\Delta_\varepsilon)$ 使得 $\chi_\varepsilon|_{\overline{\Delta_{\frac{\varepsilon}{2}}}} = 1$.

对于 $f \in C_0^\infty(U_\varepsilon)$，定义 $f_\varepsilon \in C_0^\infty(U)$ 如下：

$$f_\varepsilon(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} f(z+w) \cdot \frac{\chi_\varepsilon(w)}{w} dw \wedge d\overline{w}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial\overline{z}} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial\overline{z}} f(z+w)\frac{\chi_\varepsilon(w)}{w} dw \wedge dOw \\
&= \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}\backslash\overline{\Delta_\delta}} \frac{\partial}{\partial\overline{w}} f(z+w)\frac{\chi_\varepsilon(w)}{w} dw \wedge d\overline{w} \\
&= -\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}\backslash\overline{\Delta_\delta}} d\left(f(z+w)\frac{\chi_\varepsilon(w)}{w}dw\right) - \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}\backslash\overline{\Delta_\delta}} f(z+w)\frac{\partial}{\partial\overline{w}}(\frac{\chi_\varepsilon(w)}{w}) dw \wedge d\overline{w} \\
&= \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_\delta} f(z+w)\frac{\chi_\varepsilon(w)}{w}dw - \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}\backslash\Delta_\delta} f(w)\rho_\varepsilon(w-z) dw \wedge d\overline{w} \\
&= f(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} f(w)\rho_\varepsilon(w-z) dw \wedge d\overline{w},
\end{aligned}$$

其中 $\rho_\varepsilon(w) = \frac{\partial}{\partial\overline{w}}(\frac{\chi_\varepsilon(w)}{w}) \in C_0^\infty(\Delta_\varepsilon\backslash\overline{\Delta_{\frac{\varepsilon}{2}}})$.

将上面积分写成 Riemann 和的极限，再利用 1 推出 $\forall f \in C_0^\infty(U_\varepsilon)$，有

$$0 = T(\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial\overline{z}}) = Tf - \frac{1}{2\pi i}\int_U f(w)h_\varepsilon(w) dw \wedge d\overline{w},$$

其中 $h_\varepsilon(w) = T(z \to \rho_\varepsilon(w-z))$，第一处等号是因为 2，则

$$Tf = \frac{1}{2\pi i}\int_U f(w)h_\varepsilon(w) dw \wedge d\overline{w}.$$

$$\frac{h_\varepsilon(w+t)-h_\varepsilon(w)}{t}=T(\frac{\rho_\varepsilon(w+t-\cdots)-\rho_\varepsilon(w-\cdots)}{t})\to T(\frac{\partial\rho_\varepsilon}{\partial t}$$

推出 $h_\varepsilon \in C^1(U_\varepsilon)$.

设 $g\in C_0^\infty(U_\varepsilon)$，则

$$\begin{aligned}0&=T(\frac{\partial g}{\partial \overline{z}})\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{U_\varepsilon}\frac{\partial g}{\partial\overline{z}}\cdot h_\varepsilon(z)dz\wedge d\overline{z}\\&=0\frac{1}{2\pi i}\int_{U_\varepsilon}g\cdot\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial\overline{z}}dz\wedge d\overline{z}\end{aligned}$$

推出 $\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial \overline{z}}-9$，故 $h_\varepsilon\in\mathcal{O}(U_\varepsilon)$.

设 $\varepsilon_1<\varepsilon_2$，则 $U_{\varepsilon_1}\supset U_{\varepsilon_2}$，对 $g\in C_0^\infty(U_{\varepsilon_2})$，

$$Tg=\frac{1}{2\pi i}\int_U g(w)\cdot h_{\varepsilon_2}(w)dw\wedge d\overline{w}=\frac{1}{2\pi i}\int_U g(w)h_\varepsilon(w)dw\wedge d\overline{w}.$$

推出 $\int_{U_{\varepsilon_2}} g(w)(h_{\varepsilon_1}(w)-h_{\varepsilon_2}(w))dw\wedge d\overline{w}=0,\forall g\in C_0^\infty(U_{\varepsilon_2})$，则 $h_{\varepsilon_1}|_{U_{\varepsilon_2}}=h_{\varepsilon_2}$.

最后，取 $h|_{U_\varepsilon}:=\frac{1}{2\pi i}h_\varepsilon\in\mathcal{O}(U)$，其满足要求.

引理 2.3.3. *X 是紧 Riemann 面，$f\in\mathcal{E}_L(X)$，$S\in H^0(X,K\otimes L^*)$，则 $\langle S,d''f\rangle=0$.*

引理的证明. 设 $\{(U_i,z_i)\}$ 是 X 的一个坐标邻域覆盖，使得 L_{U_i} 平凡. 取 $\{U_i\}$ 的单位分解 χ_i 令 $f_i=\chi_i\cdot f\in C_0^\infty(U_i)$，$f=\sum f_i$，$S|_{U_i}=h_idz_i\otimes\xi^*,h_i\in\mathcal{O}(U_i)$.

$$\begin{aligned}\langle S,d''f\rangle&=\sum\langle S,d''f_i\rangle\\&=\sum\int_{U_i}h_i\cdot\frac{\partial f_i}{\partial\overline{z_i}}dz_i\wedge d\overline{z_i}\\&=-\sum\int_{U_i}\frac{\partial h_i}{\partial\overline{z_i}}f_idz_i\wedge d\overline{z_i}=0.\end{aligned}$$

定义 2.3.11. 于是 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 诱导出一个双线性形式

$$H^0(X,K\otimes L^*)\times\Big(\mathcal{E}_L^{(0,1)}(X)/d''\mathcal{E}_L(X)\Big)\to\mathbb{C}$$

仍记为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

设 $D:H^1(X,L)\to\mathcal{E}_L^{(0,1)}(X)/d''\mathcal{E}_L(X)$ 为 *Dolbeault* 同构，再定义一个双线性形式

$$H^0(X,K\otimes L^*)\times H^1(X,L)\to\mathbb{C}$$

$$\langle S,\xi\rangle_L:=\langle S,D(\xi)\rangle$$

其诱导出映射 $\Delta_L:H^0(X,K\otimes L^*)\to H^1(X,L)^*$, $S\mapsto\Delta_L(S):\xi\mapsto\langle S,\xi\rangle_L$.

定理 2.3.4. *Serre.*

Δ_L 是一个同构.

证明. Δ_L 单：若 $S \in H^0(X, K \otimes L^*)$ 使得 $\langle S, \varphi \rangle = 0, \forall \varphi \in \mathcal{E}_L^{(0,1)}(X)$，则 $S = 0$.

Δ_L 满. 设 $l : \mathcal{E}_L^{(0,1)}(X)/d''\mathcal{E}_L(X) \to \mathbb{C}$ 是一个线性映射,因为 $\dim \mathcal{E}_L^{(0,1)}(X)/d''\mathcal{E}_L(X) < \infty$，故 l 连续. 定义线性映射

$$F : \mathcal{E}_L^{(0,1)}(X) \to \mathbb{C}$$
$$\varphi \mapsto l([\varphi]).$$

则 F 为连续线性泛函,且使得 $F|_{d''\mathcal{E}_L(X)} = 0$,所以由表示定理,存在唯一的 $S \in H^0(X, K \otimes L^*)$ 使得

$$l([\varphi]) = F(\varphi) = \langle S, \varphi \rangle = \langle S, [\varphi] \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{E}_L^{(0,1)}(X).$$

再利用同构 D，知 Δ_L 是满的.

推论 2.3.1. *Serre 对偶定理.*

$$H^0(X, \Omega_{-D}) \cong H^1(X, \mathcal{O}_D)^*.$$

$$H^0(X, \mathcal{O}_{-D}) \cong H^1(X, \Omega_D)^*.$$

证明. 第一个是因为

$$\Omega_{-D} \cong \mathcal{O}_{K \otimes L_D^*},$$

$$\mathcal{O}_D \cong \mathcal{O}_{L_D}.$$

第二个是

$$H^0(X, \mathcal{O}_{-D}) \cong H^0(X, \Omega_{-K-D}) \cong H^1(X, \mathcal{O}_{K+D}) \cong H^1(X, \Omega_D).$$

2.4 调和微分形式

定义 2.4.1. X 是 *Riemann* 面, $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$, 局部地, $\omega = fdz + gd\bar{z}$. 定义 $\overline{\omega} := \overline{f}d\bar{z} + \overline{g}dz \in \mathcal{E}^1(X)$.

若 $\omega = \overline{\omega}$，则称 ω 为实的. 令 $\mathrm{Re}\omega := \frac{1}{2}(\omega + \overline{\omega})$，则 ω 为实的等价于 $\omega = Re\omega$.

$\overline{\Omega}(X) = \{\overline{\omega} : \omega \in \Omega(X)\}$. $\forall \omega \in \mathcal{E}^1(X)$，存在唯一分解 $\omega = \omega_1 + \omega_2$，其中 $\omega_1 \in \mathcal{E}^{(1,0)}(X)$，$\omega_2 \in \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$.

定义 2.4.2. 定义 *Hodge* $*$ 算子如下：$*\omega := i(\overline{\omega_1} - \overline{\omega_2})$（其为一个共轭线性算子.）

命题 2.4.1. *Hodge* $*$ 算子的若干性质.

1.$**\omega = -\omega$, $\overline{*\omega} = *\overline{\omega}$.

2. $d*\omega = id(\overline{\omega_1} - \overline{\omega_2}) = id'\overline{\omega_1} - id''\overline{\omega_2}$.

3. $*d'f = i\overline{d'} = id''\overline{f}$, $*d''f = -id'\overline{f}$.

4. $d*df = 2id'd''\overline{f}$.

定义 2.4.3. 称 $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$ 为调和的，若

$$d\omega = 0 = d*\omega.$$

记 $\mathscr{H}^1(X)$ 是 X 上的调和 1-形式全体.

定理 2.4.1. 下列命题等价 *(TFAE)*:

1. $\omega \in \mathscr{H}^1(X)$.

2. $d'\omega = 0 = d''\omega$.

3. $\omega = \omega_1 + \omega_2 \in \Omega(X) + \overline{\Omega}(X)$.

4. $\forall a \in X$，存在坐标邻域 $U \ni a$ 以及 $f \in \mathscr{H}(U)$ 使得 $\omega = df$.

证明.

$$0 = d\omega = d\omega_1 + d\omega_2 = d''\omega_1 + d'\omega_2$$

$$0 = d*\omega = id(\overline{\omega_1} - \overline{\omega_2}) = i(d'\overline{\omega_1} - d''\overline{\omega_2})$$

等价于 $0 = d''\omega_1 - d'\omega_2$. 故 $\omega \in \mathscr{H}^1(X)$ 等价于 $d''\omega_1 = 0 = d'\omega_2$. 容易验证 1，2，3 等价.

3 推 4：设 $\omega_1 = h_1dz, \overline{\omega_2} = h_2dz$, $h_1, h_2 \in \mathcal{O}$. 令

$$f(z) := \int_0^z h_1dz + \int_0^{\bar{z}} \overline{h_2dz} \in \mathscr{H}(X),$$

则 $df = h_1dz + \overline{h_2dz} = \omega$.

4 推 1：设 $\omega = df$，$d\omega = d^2f = 0$. $d*\omega = d*df = 2id'd''\overline{f} = 0$ 推出 $\omega \in \mathscr{H}^1(X)$.

定理 2.4.2. 设 $\sigma \in \mathscr{H}^1(X)$ 且是实的，则存在唯一的 $\omega \in \Omega(X)$ 使得 $\sigma = Re\ \omega$.

证明. 存在性：设 $\sigma = \omega_1 + \overline{\omega_2}$，$\omega_1, \omega_2 \in \Omega(X)$. $\omega_1 + \overline{\omega_2} = \sigma = \overline{\sigma} = \overline{\omega_1} + \omega_2$. 推出 $\omega_1 - \omega_2 = \overline{\omega_1 - \omega_2}$，故 $\omega_1 = \omega_2$，因此 $\sigma = \omega + \overline{\omega} = 2\,\mathrm{Re}\ \omega$.

唯一性：设 $\omega \in \Omega(X)$ 使得 $\mathrm{Re}\ \omega = 0$. 局部地，$\omega = df$，$f \in \mathcal{O}$.

$$0 = \mathrm{Re}\ \omega = \mathrm{Re}\ df = d\,\mathrm{Re}\ f$$

推出 Re f 局部为常数，进而 f 局部为常数，进而 $df = 0$，则 $\omega = 0$.

定义 2.4.4. *设 X 是紧 Riemann 面（本节下述命题均有此假设），$\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{E}^1(X)$，令 $\langle\omega_1, \omega_2\rangle := \int_X \omega_1 \wedge *\omega_2$.*

局部地，设 $\omega_1 = f_1 dz + g_1 d\bar{z}$，$\omega_2 = f_2 dz + g_2 d\bar{z}$，

$$\begin{aligned}\omega_1 \wedge *\omega_2 &= (f_1 dz + g_1 d\bar{z}) \wedge i(\overline{f_2} d\bar{z} - \overline{g_2} dz) \\ &= i(f_1\overline{f_2} + g_1\overline{g_2}) dz \wedge d\bar{z}\end{aligned}$$

故 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 $\mathcal{E}^1(X)$ 上的一个内积.

引理 2.4.1. *1. $d'\mathcal{E}(X), d''\mathcal{E}(X), \Omega(X), \overline{\Omega}(X)$ 相互正交.*

2. $d\mathcal{E}(X)$ 与 $*d\mathcal{E}(X)$ 正交，且 $d\mathcal{E}(X) \oplus *d\mathcal{E}(X) = d'\mathcal{E}(X) \oplus d''\mathcal{E}(X)$.

引理的证明. 第一条引理：$\mathcal{E}^{(1,0}(X) \perp \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$ 显然，故 $\mathcal{E}^1(X) = \mathcal{E}^{(1,0)}(X) \oplus \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$. 故只需证 $d'\mathcal{E}(X) \perp \Omega(X)$，$d''\mathcal{E}(X) \perp \overline{\Omega}(X)$.

设 $f \in \mathcal{E}(X), \omega \in \Omega(X)$

$$\omega \wedge *d'f = \omega \wedge i d''\overline{f} = -i d''(\overline{f}\omega) = -i d(\overline{f}\omega)$$

推出

$$\langle\omega, d'f\rangle = \int_X \omega \wedge *d'f = -i \int_X d(\overline{f}\omega) = 0$$

故 $\omega \perp d'f$.

第二条引理：设 $f, g \in \mathcal{E}(X)$，则 $df \wedge **dg = -df \wedge dg = -d(f dg)$，推出 $\langle df, *dg\rangle = -\int_X d(f dg) = 0$，进而 $d\mathcal{E}(X) \perp *d\mathcal{E}(X)$.

又因为 $d'\mathcal{E}(X) \oplus d''\mathcal{E}(X) \supset d\mathcal{E}(X)$，$*d\mathcal{E}(X) \subset d'\mathcal{E}(X) \oplus d''\mathcal{E}(X)$(性质 3). 所以 LHS 包含于 RHS.

RHS 包含于 LHS 由性质 3 易得.

推论 2.4.1. *$\mathscr{H}^1(X) = \Omega(X) \oplus \overline{\Omega}(X)$，进而 $\dim \mathscr{H}^1(X) = 2\dim\Omega(X) = 2g$.*

推论 2.4.2. *$\sigma \in \mathscr{H}^1(X)$ 且正合，则 $\sigma = 0$.($\sigma \in \mathscr{H}^1(X) \cap d\mathcal{E}(X)$)*

推论 2.4.3. *$f \in \mathscr{H}(X)$，则 f 恒为常数.(考虑 $\sigma = df$)*

定理 2.4.3. *$\mathcal{E}^{(0,1)}(X) = d''\mathcal{E}(X) \oplus \overline{\Omega}(X)$.*

证明. 由 Dolbeault 定理，$\mathcal{E}^{(0,1)}(X)/d''\mathcal{E}(X) \cong H^1(X, \mathcal{O})$，则 $\dim \mathcal{E}^{(0,1)}(X)/d''\mathcal{E}(X) = g$.

显然 $\mathcal{E}^{(0,1)}(X) \supset d''\mathcal{E}(X) \oplus \overline{\Omega}(X)$，则 $\mathcal{E}^{(0,1)}(X)/d''\mathcal{E}(X) \supset \overline{\Omega}(X)$.

因为 $\dim \overline{\Omega} = g$，所以 $\mathcal{E}^{(0,1)}(X)/d''\mathcal{E}(X) = \overline{\Omega}(X)$.

定理 2.4.4. *Hodge 正交分解定理.*

$$\mathcal{E}^1(X) = d\mathcal{E}(X) \oplus *d\mathcal{E}(X) \oplus \mathscr{H}^1(X).$$

证明. 由上述定理，$\mathcal{E}^{(1,0)} = d'\mathcal{E}(X) \oplus \Omega(X)$，推出

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^1(X) &= \mathcal{E}^{(1,0)}(X) \oplus \mathcal{E}^{(0,1)}(X) \\ &= d'\mathcal{E}(X) \oplus d''\mathcal{E}(X) \oplus \Omega(X) \oplus \overline{\Omega}(X) \\ &= d\mathcal{E}(X) \oplus *d\mathcal{E}(X) \oplus \mathscr{H}^1(X).\end{aligned}$$

推论 2.4.4. $\sigma \in \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$，方程 $d''f = \sigma$ 可解等价于

$$\int_X \sigma \wedge \omega = 0, \quad \forall \omega \in \Omega(X).$$

证明. 左推右：

$$\int_X \sigma \wedge \omega = \int_X d''f \wedge \omega = \int_X d''(f\omega) = \int_X d(f\omega) = 0.$$

右推左：

$$\langle \sigma, \overline{\omega} \rangle = \int_X \sigma \wedge (-i\omega) = -i \int_X \sigma \wedge \omega = 0$$

推出 $\sigma \perp \overline{\Omega}(X)$，由定理 2.4.3 知 $\sigma \in d''\mathcal{E}(X)$.

定理 2.4.5.

$$\operatorname{Ker}\left(d : \mathcal{E}^1(X) \to \mathcal{E}^2(X)\right) = d\mathcal{E}(X) \oplus \mathscr{H}^1(X).$$

证明. 记 LHS 为 $\mathscr{L}$，LHS 包含 RHS 是显然的，对于另一方向，由 Hodge 正交分解，只需证 $\mathscr{L} \perp *d\mathcal{E}(X)$ 即可.

设 $\omega \in \mathscr{L}$，$f \in \mathcal{E}(X)$，

$$\omega \wedge **df = -\omega \wedge df = d(f\omega)$$

推出 $\langle \omega, *df \rangle = \int_X d(f\omega) = 0$.

推论 2.4.5. $\sigma \in \mathcal{E}^1(X)$ 正合（即 $df = \sigma$ 可解）等价于

$$\int_X \sigma \wedge \omega = 0, \quad \forall 闭 \omega \in \mathcal{E}^1(X).$$

证明. 左推右是 Stokes 公式，右推左：

$$\langle \omega, *\sigma \rangle = \int_X \omega \wedge **\sigma = -\int_X \omega \wedge \sigma = 0$$

对于任意闭的 $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$. 推出 $*\sigma \perp \mathscr{L}$，则由 Hodge 分解，$*\sigma \in *d\mathcal{E}(X)$，进而 $\sigma \in d\mathcal{E}(X)$.

定理 2.4.6. *Hodge-de Rham.*

$$H^1(X, \mathbb{C}) \cong Rh^1(X) \cong \mathscr{H}^1(X)$$

其中第一个同构是 *de Rham* 同构，第二处同构是上一条定理.

定义 2.4.5. 称 $b_1 := \dim H^1(X, \mathbb{C})$ 为 X 的第一 *Betti* 数，其为一个拓扑不变量.

注 2.4.1. 由 *Hodge-de Rham* 定理，$b_1 = 2g$，故 g 也是拓扑不变量.

注 2.4.2. 由可定向紧曲面的拓扑分类，X 同胚于球面加上 g 个柄.

2.5 Mittag-Leffler 问题

定理 2.5.1. *Mittag-Leffler 定理.*

给定 $\mathbb{C}$ 中一个离散点列上的一列主部，存在 $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ 使得 f 在这些点上的主部恰好为给定主部.

问：在 Riemann 面上是否有类似现象？

定义 2.5.1. X 是 *Riemann* 面，$\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ 为 X 的开覆盖. 称 $\mu = (f_i) \in C^0(\mathscr{U}, \mathcal{M})$ 为一个 *Mittag-Leffler* 分布，若 $f_i - f_j \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j), \forall i, j$，即 $\delta\mu \in Z^1(\mathscr{U}, \mathcal{O})$.

相应于 μ 的一个解指的是一个 $f \in \mathcal{M}(X)$ 使得 $f - f_i \in \mathcal{O}(U_i), \forall i$.

注 2.5.1. 则 *Mittag-Leffler* 定理等价于 $\mathbb{C}$ 上的任何 *M-L* 分布存在解.

定理 2.5.2. *M-L* 分布 μ 存在解等价于 $[\delta\mu] = 0$ 于 $H^1(\mathscr{U}, \mathcal{O})$.

证明. 左推右：设 f 为 $\mu = (f_i)$ 的解，则 $g_i := f_i - f \in \mathcal{O}(U_i)$，

$$\delta\mu = (f_i - f_j) = (g_i - g_j) \in B^1(\mathscr{U}, \mathcal{O}).$$

右推左：$[\delta\mu] = 0$，推出存在 $g_i \in \mathcal{O}(U_i)$ 使得 $\delta\mu = (g_i - g_j)$，则 $f_i - f_j = g_i - g_j$，即 $f_i - g_i = f_j - g_j$，做 $f|_{U_i} := f_i - g_i \in \mathcal{M}(X)$，其为 μ 的解.

注 2.5.2. 设 X 是紧 *Riemann* 面，则 $H^1(X, \mathcal{M}) = 0$. 对于任意 $\xi \in H^1(X, \mathcal{O})$，则 $\xi = [(f_{ij})], (f_{ij}) \in Z^1(\mathscr{U}, \mathcal{O}) \subset Z^1(\mathscr{U}, \mathcal{M})$，故存在 $f_i \in \mathcal{M}(U_i)$，使得 $f_{ij} = f_i - f_j$. 故 $\mu = (f_i)$ 为一个 *M-L* 分布，且 $\xi = [\delta\mu]$.

当 $g \geq 1$ 时，存在 $\xi \in H^1(X, \mathcal{O})$ 非 0，其对应的 *M-L* 分布 μ 不存在解.

定义 2.5.2. 称 $\mu = (\omega_i)_{i\in I} \in C^0(\mathscr{U}, \mathcal{M}^1)$ 为一个 *M-L* 分布，若 $\omega_i - \omega_j \in \Omega(U_i \cap U_j), \forall i, j$.

对于 $a \in X$，定义 μ 在 a 处的留数为 $\operatorname{Res}_a \mu := \operatorname{Res}_a \omega_i$，若 $a \in U_i$.（验证定义良好）

若 X 是紧 *Riemann* 面，则定义 $\operatorname{Res} \mu = \sum\limits_{a\in X} \operatorname{Res}_a \mu$.（本质是有限和）

定理 2.5.3. X 是紧 *Riemann* 面，*M-L* 分布 $\mu = (f_i)$ 存在解等价于

$$\operatorname{Res} \mu\omega = 0, \quad \forall \omega \in \Omega(X).$$

证明. 左推右：设 f 为 μ 的解，则 $f - f_i \in \mathcal{O}(U_i)$，则 $\forall x \in U_i$，$\operatorname{Res}_x f \cdot \omega = \operatorname{Res}_x f_i \cdot \omega, \forall i$. 另一方面，因为 $f \cdot \omega \in \mathcal{M}^1(X)$，由留数定理，$\operatorname{Res} f \cdot \omega = 0$.

右推左：因为 $\delta\mu \in Z^1(\mathscr{U}, \mathcal{O}) \subset Z^1(\mathscr{U}, \mathcal{E})$，而 $H^1(\mathscr{U}, \mathcal{E}) = 0$，故存在 $(\sigma_i) \in C^0(\mathscr{U}, \mathcal{E})$ 使得 $\mathcal{O}(U_i \cap U_j) \ni f_i - f_j = \sigma_i - \sigma_j$ 于 $U_i \cap U_j$. 故 $d''\sigma_i = d''\sigma_j$ 于 $U_i \cap U_j$，则 $\alpha|_{U_i} := d''\sigma_i \in \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$. 我们假设有

$$\int_X \alpha \wedge \omega = 0, \quad \forall \omega \in \Omega(X), \tag{2.5.1}$$

则存在 $u \in \mathcal{E}(X)$ 使得 $d''u = \alpha$.

令 $g_i = \sigma_i - u$，则 $d''g_i = 0$，故 $g_i \in \mathcal{O}(U_i)$，且 $\delta\mu = (f_i - f_j) = (\sigma_i - \sigma_j) = (g_i - g_j)$，则 $[\delta\mu] = 0$，故 μ 存在解.

我们再说明方程 (2.5.1) 成立. 令 $\beta|_{U_i} := f_i - \sigma_i \in \mathcal{E}(X^1)$，$X' = X\backslash\{a_1, \cdots, a_n\}$，其中 a_j 是 μ 的极点. 则 $d''\beta = d''f_i - d''\sigma_i = -\alpha$ 于 X'.

$$\begin{aligned}\int_X \alpha\wedge\omega &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{X\backslash\bigcup\limits_j\{|z_j|\le\varepsilon\}} d''\beta\wedge\omega\\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{X\backslash\bigcup\limits_j\{|z_j|\le\varepsilon\}} d(\beta\wedge\omega)\\ &= \sum_{j=1}^n \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\{|z_j|=\varepsilon\}}\beta\wedge\omega\\ &= \sum_{j=1}^n \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\{|z_j|=\varepsilon\}} f_j\wedge\omega - \sigma_j\wedge\omega\\ &= 2\pi i\operatorname{Res}\mu\cdot\omega = 0.\end{aligned}$$

一些应用.

$g=1$ 的情形. $\Gamma := \mathbb{Z}\gamma_1 + \mathbb{Z}\gamma_2$ 为一个格. $P := \{t_1\gamma_1 + t_2\gamma_2 : t_1, t_2 \in [0,1)\}$.

命题 2.5.1. *给定 $a_1, \cdots, a_n \in P$ 以及主部 $\sum\limits_{\nu=-r_j}^{-1} C_\nu^j (z-a_j)^\nu$，$1 \le j \le n$.*

存在 Γ 双周期亚纯函数，使得其在 a_j 处有上述给定主部，等价于

$$\sum_{j=1}^n C_{-1}^j = 0.$$

证明. 设 $X = \mathbb{C}/\Gamma$. 记 ω 为由 dz 诱导的 X 上的全纯 1-形式，则 $\Omega(X) = \mathbb{C}\cdot\omega$. 设 μ 为相应的 M-L 分布. 则 μ 存在解等价于 $\operatorname{Res}\mu\cdot\omega = 0$（这里用到了 ω 构成基），即等价于 $\sum\limits_{j=1}^n C_{-1}^j = 0$.

$g \ge 2$ 的情形.

定义 2.5.3. $U \subset \mathbb{C}$ 为区域，$f_1, \cdots, f_g \in \mathcal{O}(U)$，称

$$W(f_1, \cdots, f_g) := \det\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_g\\ f_1' & f_2' & \cdots & f_g'\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ f_1^{(g-1)} & f_2^{(g-1)} & \cdots & f_g^{(g-1)}\end{pmatrix}$$

为 *Wronski* 行列式.

引理 2.5.1. *$f_1, \cdots, f_g$ 线性无关等价于 $W(f_1, \cdots, f_g)$ 不恒等于 0.*

引理的证明. 右推左：假设 $f_1, \cdots, f_g$ 线性相关，即存在不全为 0 的 $c_1, \cdots, c_g \in \mathbb{C}$ 使得

$$c_1 f_1 + \cdots + c_g f_g = 0.$$

不妨设 $c_g \neq 0$，则 $f_g = -\sum\limits_{j=1}^{g-1}\frac{c_j}{c_g} f_j$，则 $W(f_1, \cdots, f_g) \equiv 0$，矛盾.

左推右：首先证明，若 $h_j = \varphi \cdot f_j, \varphi \in \mathcal{O}(U)$，则 $W(h_1, \cdots, h_g) = \varphi^g \cdot W(f_1, \cdots, f_j)$. 由 Lebnitz 法则，$H_k^{(\nu)} = \varphi \cdot f_k^{(\nu)} + \sum\limits_{\mu<\nu} C_\nu^\mu \varphi^{(\nu-\mu)} f_k^{(\mu)}$，则

$$W(h_1, \cdots, h_g) = \det(\varphi f_k^{(j)}) = \varphi^g W(f_1, \cdots, f_g).$$

回到原题,用数学归纳法,$g = 1$ 时显然,现假设 $g-1$ 情形已证明,若 $f_g^{-g} W(f_1, \cdots, f_g) = 0$，且不妨设 f_g 不恒等于 0. 令 $V := U \backslash f_g^{-1}(0)$，在 V 上

$$W(\frac{f_1}{f_g}, \cdots, \frac{f_{g-1}}{f_g}, 1) = f_g^{-g} W(f_1, \cdots, f_g) = 0$$

记 $h_k := \frac{f_k}{f_g}$，有

$$W(\frac{f_1}{f_g}, \cdots, \frac{f_{g-1}}{f_g}, 1) = W(h_1, \cdots, h_{g-1}, 1) = \pm W(h_1', \cdots, h_{g-1}')$$

由归纳假设，存在不全为 0 的复数 $c_1, \cdots, c_{g-1}$ 使得 $\sum\limits_{j=1}^{g-1} c_j h_j' = 0$，则 $\sum\limits_{j=1}^{g-1} c_j h_j$ 时常数，故 $h_1, \cdots, h_{g-1}, 1$ 线性相关，即 $f_1, \cdots, f_g$ 在 V 上线性相关. 又 $V \subset U$ 稠密，所以 $f_1, \cdots, f_g$ 再 U 上线性相关，矛盾.

定义 2.5.4. *X 是紧 Riemann 面，亏格恰为 g，设 $\omega_1, \cdots, \omega_g$ 为 $\Omega(X)$ 的一组基. 局部地，$\omega_k = f_k dz$，定义 $W_z(\omega_1, \cdots, \omega_g) := W(f_1, \cdots, f_g)$.*

定理 2.5.4. *设 (U, z) 和 $(V, \overline{z})$ 为 X 上的两个坐标邻域，且 $U \cap V$ 非空. 则在 $U \cap V$ 上成立*

$$W_z(\omega_1, \cdots, \omega_g) = (\frac{d\overline{z}}{dz})^N W_{\overline{z}}(\omega_1, \cdots, \omega_g),$$

其中 $N = \frac{g(g+1)}{2}$.

注 2.5.3. $\sigma|_U := W_z(\omega_1, \cdots, \omega_g) dz^{\otimes N} \in \Gamma(X, K^{\otimes N})$.

定义 2.5.5. *设 $g \geq 2$，称 $p \in X$ 为一个 Weierstrass 点，若存在基 $\omega_1, \cdots, \omega_g \in \Omega(X)$ 以及坐标 (U, z) 使得 $W_z(\omega_1, \cdots, \omega_g)|_p = 0$. 上述定理保证此定义不依赖于坐标选取，还需验证定义与 $\Omega(X)$ 的正交基的选取无关*

$(\omega_1, \cdots, \omega_g) = (\overline{\omega_1}, \cdots, \overline{\omega_g}) \cdot C$，则 $W_z(\omega_1, \cdots, \omega_g) = |C| W_z(\overline{\omega_1}, \cdots, \overline{\omega_g})$（练习）

定理 2.5.5. *设 $p \in X$，存在 $f \in \mathcal{M}(X) \cap \mathcal{O}(X \backslash \{p\})$ 使得其在 p 处有阶小于等于 g 的极点，等价于，p 是一个 Weierstrass 点.*

证明. 取 $\omega_1, \cdots, \omega_g \in \Omega(X)$ 的一组基. 取坐标 (U, z) 使得 $z(p) = 0$. 记 $\omega_k = \sum\limits_{\gamma=0}^{\infty} a_{k\gamma} z^\gamma dz$ 于 U. 则存在 $f \in \mathcal{M}(X) \cap \mathcal{O}(X \backslash \{p\})$，其在 p 处主部为 $h = \sum\limits_{\gamma=0}^{q-1} c_\gamma / z^{\gamma+1}$，$c_0, \cdots, c_{q-1}$ 不全为 0，等价于其是下面 M-L 分布的一个解: $\mu = (h, 0) \in C^0(\mathscr{U}, \mathcal{M})$，$\mathscr{U} = \{U, X \backslash \{p\}\}$.

$$\mathrm{Res}(\omega_k \mu) = \mathrm{Res}_p(\omega_k \cdot h) = \sum_{\gamma=0}^{g-1} a_{k\gamma} \cdot c_\gamma$$

推出 $\begin{cases} \mathrm{Res}(\omega_k \mu) = 0 \\ q \leq k \leq g \end{cases}$ 有非平凡解 $(c_0, \cdots, c_{g-1})$ 等价于 $\det(a_{k\gamma})_{1 \leq k \leq g, 0 \leq \gamma \leq g-1} = 0$，即 $W_z(\omega_1, \cdots, \omega_g)|_p = 0$，$p$ 为一个 Weierstrass 点.

定理 2.5.6. *Weierstrass* 点的个数为 $(g-1)g(g+1)$，记重数在内.

证明. 设 (U_i, z_i)，$i \in I$ 为 X 的一个坐标邻域覆盖，记 $\psi_{ij} := dz_j/dz_i$ 于 $U_i \cap U_j$. 设 $\omega_1, \cdots, \omega_g \in \Omega(X)$ 为一组基. 令 $W_i = W_{z_i}(\omega_1, \cdots, \omega_g) \in \mathcal{O}(U_i)$.

定义 $D \in \mathrm{Div}(X)$：$D(x) := \mathrm{ord}_x W_i$ 若 $x \in U_i$. 只须证明 $\deg D = (g-1)g(g+1)$.

设 $D_1 = (\omega_1)$，则 $\deg D_1 = 2g-2$. 设 $\omega_1 = f_{1i} dz_i$ 于 U_i，则 $D_1(x) = \mathrm{ord}_x f_{1i}$，若 $x \in U_i$. 注意到 $f_{1i} = \psi_{ij} f_{1j}$ 于 $U_i \cap U_j$，则 $\psi_{ij} = f_{1i}/f_{1j}$.

因为 $W_i = \psi_{ij}^N W_j$，所以 $W_i \cdot f_{1i}^{-N} = W_j \cdot f_{1j}^{-N}$ 于 $U_i \cap U_j$. 进而 $f|_{U_i} := W_i \cdot f_{1i}^{-N} \in \mathcal{M}(X)$. 则 $0 = \deg(f) = \deg D - N \cdot \deg D_1$,

$$\deg D = N \cdot \deg D_1 = (g-1)g(g+1).$$

推论 2.5.1. $g \geq 2$ 时，*Weierstrass* 点存在，更加地，存在分歧全纯覆盖 $f : X \to \mathbb{P}^1$ 使得叶数不超过 g.

特别地，若 $g = 2$，则全纯覆盖的叶数只能为 2，进而 X 为超椭圆.

定义 2.5.6. X 是紧 *Riemann* 面，定义 X 的阶为

$$\deg X := \min\{n : 存在n叶全纯覆盖f : X \to \mathbb{P}^1\}.$$

由推论，$\deg X \leq g$.

2.6 Abel 定理

定理 2.6.1. *Weierstrass*

设 $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ 离散，$\{m_n\} \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$，则存在 $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ 使得 $f \in \mathcal{O}\backslash\{a_1, \cdots, a_n, \cdots\}$ 且 $\operatorname{ord}_{a_n} f = m_n$.

问：在 Riemann 面上是否有类似现象？

定义 2.6.1. X 是 *Riemann* 面，$D \in \operatorname{Div}(X)$. 称 f 为 D 的一个解，若 $f \in \mathcal{M}(X)$ 使得 $(f) = D$（即 D 是一个主除子）.

注 2.6.1. 则 *Weierstrass* 定理等价于，任意 $D \in \operatorname{Div}(X)$ 存在一个解.

若 X 是紧 Riemann 面，则 $D \in \operatorname{Div}(X)$ 存在解可推出 $\deg D = 0$.

记 $X_D = \{x \in X : D(x) \geq 0\}$，则 $X\backslash X_D$ 离散.

定义 2.6.2. D 的一个弱解指一个 $f \in \mathcal{E}(X_D)$ 使得 $\forall a \in X$, 存在坐标 (U, z) 使得 $z(a) = 0$ 及 $\psi \in \mathcal{E}(U)$，$\psi(a) \neq 0$，使得 $f = z^k \cdot \psi$ 于 $X_D \cap U$，$k = D(a)$.

弱解 f 为一个解，等价于 $f \in \mathcal{O}(X_D)$.

命题 2.6.1. 若 f_1, f_2 为 D_1, D_2 的弱解，则 $f_1 \cdot f_2$ 是 $D_1 + D_2$ 的弱解，f_1/f_2 是 $D_1 - D_2$ 的弱解.

命题 2.6.2. 设 f 为 D 的一个弱解，则 $\frac{df}{f} \in \mathcal{E}^1(X\backslash \operatorname{Supp} D)$.

定义 2.6.3. 对 $a \in \operatorname{Supp} D$, $k = D(a)$，则 $f = z^k \cdot \psi$，$\psi(a) \neq 0$. $\frac{df}{f} = k\frac{dz}{z} + \frac{d\psi}{\psi}$. 则可定义 $\int_X \frac{df}{f} \wedge \sigma$，$\sigma \in \mathcal{E}^1(X)$ 具紧支集.

注意 $\frac{d''f}{f} = \frac{d''\psi}{\psi}$，则 $\frac{d''f}{f} \in \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$.

引理 2.6.1. 设 $a_1, \cdots, a_n \in X$，$k_1 \cdots, k_n \in \mathbb{Z}$，设 $D = \sum\limits_{j=1}^{n} k_j \cdot a_j \in \operatorname{Div}(X)$. 若 f 为 D 的一个弱解，则 $\forall g \in \mathcal{E}(X)$ 具紧支集，有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_X \frac{df}{f} \wedge dg = \sum_{j=1}^{n} k_j g(a_j).$$

引理的证明. 取坐标 (U_j, z_j) 使得 $z_j(a_j) = 0$，且在 U_j 上 $f = z_j^{k_j} \cdot \psi_j$，$\psi_j \in \mathcal{E}(U_j)$，$\psi_j(a_j) \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\int_X \frac{df}{f} \wedge dg &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{X\backslash\bigcup\limits_j\{|z_j|\leq\varepsilon\}} d(g \cdot \frac{df}{f}) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_j \int_{|z_j|=\varepsilon} g \cdot \frac{df}{f} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_j \int_{|z_j|=\varepsilon} (gk_j \cdot \frac{dz_j}{z_j} + g \cdot \frac{d\psi_j}{\psi_j} \\
&= 2\pi i \sum_j k_j g(a_j).
\end{aligned}$$

定义 2.6.4. X 上一个 1-链指 $C=\sum\limits_{j=1}^{k} n_j c_j$，$n_j\in\mathbb{Z}$，$c_j:[0,1]\to X$ 为分段光滑曲线. 记 $C_1(X)$ 为 X 上 1-链全体.

若 $\omega\in\mathcal{E}^1(X)$，则定义 $\int_C\omega:=\sum\limits_{j=1}^{k} n_j\int_{C_j}\omega$. 定义上边缘算子 $\partial: C_1(X)\to \mathrm{Div}(X)$ 如下：

设 $c:[0,1]\to X$ 为一条曲线，若 $c(0)=c(1)$，则 $\partial C:=0$，否则定义

$$\partial C(x)=\begin{cases}1, & x=c(1)\\ -1, & x=c(0)\\ 0, & \text{其余情形}\end{cases}.$$

一般地，若 $c=\sum\limits_{j=1}^{k} n_j c_j\in C_1(X)$，则定义 $\partial c:=\sum\limits_{j=1}^{k} n_j\partial c_j$.

若 X 是紧 Riemann 面, $D\in\mathrm{Div}(X)$, $\deg D=0$, 则 $D=a_1+a_2+\cdots+a_n-b_1-\cdots-b_n$. 令 c_j 为连接 a_j,b_j 的一条曲线. 则定 $c=c_1+\cdots+c_k$，则 $\partial c=D$.

定义 2.6.5. 称 $Z_1(X):=\mathrm{Ker}\left(C_1(X)\xrightarrow{\partial}\mathrm{Div}(X)\right)$ 为 X 上一个 1-循环群.

对于 $c,c'\in Z_1(X)$，定义 $c\sim c'$ 等价于 $\int_c\omega=\int_{c'}\omega$，对于任意闭的 $\omega\in\mathcal{E}^1(X)$ 成立.

称 $H_1(X):=Z_1(X)/\sim$ 为 X 的一阶下同调群.

定理 2.6.2. *Abel* 定理

X 是紧 Riemann 面, $D\in\mathrm{Div}(X)$, $\deg D=0$. 则 D 有一个解等价于, 存在 $c\in C_1(X)$ 使得 $\partial c=D$ 且 $\int_c\omega=0$ 对于任意 $\omega\in\Omega(X)$ 成立.

证明. 右推左：Step 1，寻找弱解；Step 2，通过解 d'' 方程把弱解调整为强解.

引理 2.6.2. *X 是 Riemann 面，c 是 X 上曲线，$U\supset c$ 为一个相对紧邻域，则存在 ∂c 的弱解 f，使得 1. $f|_{X\backslash U}=1$，2. $\int_c\omega=\frac{1}{2\pi i}\int_X\frac{df}{f}\wedge\omega$，对于任意闭的 $\omega\in\mathcal{E}^1(X)$.*

引理的证明. 首先设 (U,z) 为一个坐标邻域, 使得 $z(U)$ 为单位圆盘, 且 $c\subset U$. 记 $a=c(0)$, $b=c(1)$, 取 $r<1$ 使得 $c\subset\overline{\Delta_r}$. 则 $\log\frac{z-b}{z-a}$ 在 $\{r<|z|<1\}$ 上可取单指支, 再取 $r<r'<1$ 及 $\psi\in C_0^\infty(\Delta_{r'})$，$\psi|_{\overline{\Delta_r}}=1$. 定义

$$f:=\begin{cases}\exp(\psi\cdot\log\frac{z-b}{z-a}), & r<|z|<1\\ \frac{z-b}{z-a}, & |z|\le r\\ 1, & X\backslash U\end{cases}.$$

则 f 为 ∂c 的一个弱解. 设 $\omega\in\mathcal{E}^1(X)$ 闭，由 Poincaré 引理，存在 $g\in\mathcal{E}(X)$ 使得 $\mathrm{Supp}\, g\subset X$ 且 $\omega=dg$ 于 $\overline{\Delta_{r'}}$.（取 $r'<r''<1$，则 $h\in\mathcal{E}(\Delta_{r''})$ 使得 $dh=\omega$ 于 $\Delta_{r''}$，取 $\chi\in C_0^\infty(\Delta_{r''})$ 使得 $\chi|_{\overline{\Delta|_{r'}}}=1$，取 $g=\chi\cdot h\in\mathcal{E}(X)$）.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_X\frac{df}{f}\wedge\omega=\frac{1}{2\pi i}\int_X\frac{df}{f}\wedge dg \xlongequal{\text{引理 2.6.1}} g|_a^b=\int_c dg=\int_c\omega.$$

一般地，取划分 $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=1$ 及坐标邻域 (U_j,z_j)，$1\le j\le n$ 使得

(i) $c_j := c|_{[t_{j-1},t_j]} \subset U_j \subset U$.

(ii) $z_j(U_j)$ 为单位圆. 取 ∂c_j 的弱解 f_j 使得 $f_j|_{X\setminus U_j} = 1$ 且 $\int_{c_j}\omega = \frac{1}{2\pi i}\int_X \frac{df_j}{f_j}\wedge\omega$，对于任意闭的 $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$. 取 $f := f_1\cdots f_n$，则 f 为 ∂c 的一个弱解，使得 $f|_{X\setminus U} = 1$ 且

$$\frac{1}{2\pi i}\int_X \frac{df}{f}\wedge\omega = \sum_j \frac{1}{2\pi i}\int_X \frac{df_j}{f_j}\wedge\omega = \sum_j \int_{c_j}\omega = \int_c \omega.$$

证明. 回到 Abel 定理，右推左方向. 设 $c = \sum\limits_{j=1}^{k} n_j c_j$，由引理 2.6.2，存在相应于 ∂c_j 的弱解 f_j 使得 $\frac{1}{2\pi i}\int_X \frac{df_j}{f_j}\wedge\omega = \int_c \omega$，对于任意闭的 $\omega\in\mathcal{E}^1(X)$.

令 $f := f_1^{n_1}\cdots f_k^{n_k}$，则 f 为 ∂c 的一个弱解，且

$$\frac{1}{2\pi i}\int_X \frac{df}{f}\wedge\omega = \sum_j \frac{n_j}{2\pi i}\int_X \frac{df_j}{f_j}\wedge\omega = \sum_j n_j\int_{c_j}\omega = \int_c \omega.$$

对于 $\omega\in\Omega(X)$，则

$$0 = \int_c \omega = \frac{1}{2\pi i}\int_X \frac{df}{f}\wedge\omega = \frac{1}{2\pi i}\int_X \frac{d''f}{f}\wedge\omega.$$

注意到 $\frac{d''f}{f}\in\mathcal{E}^{(0,1)}(X)$，由 Hodge 理论，存在 $g\in\mathcal{E}(X)$ 使得 $d''g = \frac{d''f}{f}$.

令 $F := e^{-g}\cdot f$，则 F 也为 $D = \partial c$ 的一个弱解，且在 X_D 上，

$$d''F = -e^{-g}d''g\cdot f + e^{-g}\cdot d''f = 0.$$

进而 $F\in\mathcal{O}(X_D)$，即 F 是 D 的一个解.

注 2.6.2. *Oka 原理*

M 是复流形，使得 $d''u = v$ 对任意 $v\in\mathcal{E}^{(0,1)}(X)$ 使得 $d''v = 0$，均可解.

那么一个问题，在全纯框架下可解，等价于其在拓扑框架下可解.

证明. Abel 定理的左推右方向. 设 f 为 D 的一个解，其定义一个分歧覆盖 $X\to\mathbb{P}^1$. 记 $a_1,\cdots,a_r$ 为分歧点全体，记 $Y = \mathbb{P}^1\setminus\{f(a_1),\cdots,f(a_r)\} = \mathbb{P}^1\setminus\{y_1,\cdots,y_s\}$，$s\le r$.

对 $\omega\in\Omega(X)$，定义 Push-down $f_*\omega$ 如下：

$\forall y\in Y$，存在邻域 $V\ni y$，使得 $f^{-1}(V) = \bigcup\limits_{k=1}^{n} U_k$，$U_k\subset X\setminus\{a_1,\cdots,a_r\}$ 且 $f|_{U_k}: U_k\to V$ 是双全纯映射，令 $\varphi_k = (f|_{U_k})^{-1}$. 定义

$$f_*\omega|_V := \sum_{k=1}^{n}\varphi_k^*\omega,$$

其与 V 的选取无关，故 $f_*\omega\in\Omega(Y)$.

则有如下的可去奇性：

$$f_*\omega\text{可全纯延拓至}\mathbb{P}^1 \tag{2.6.1}$$

假设 (*) 成立，则 $f_*\omega\in\Omega(\mathbb{P}^1)$，进而 $f_*\omega = 0$. 取曲线 $\gamma:[0,1]\to\mathbb{P}^1$，$\gamma(0)=\infty$，$\gamma(1) = 0$，$\gamma|_{(0,1)}\subset Y$.

令 $f^{-1}(\gamma) = c_1+\cdots+c_n =: c\in C_1(X)$. 其中 c_j 为 X 中连接 f 的极点与零点的曲线，则 $\partial c = D$，且 $\forall\omega\in\Omega(X)$，有 $\int_c\omega = \sum\limits_{k=1}^{n}\int_\gamma f_*\omega = 0$.

不妨设 $f^{-1}(y_1)\cap\{a_1,\cdots,a_r\}=\{a_1,\cdots,a_{r'}\}$，$r'\le r$. 记 $n_j=\mathrm{ord}_{a_j}f$，不妨设 $\varphi_1,\cdots,\varphi_{n_1}$ 由 a_1 确定. 只需证明，$\varphi_1^*\omega+\cdots+\varphi_{n_1}^*\omega$ 可全纯沿拓至 y_1.

取 a_1 处坐标 (U,z)，y_1 处坐标 (W,ζ)，使得 f 可表示为 $\zeta=z^{n_1}$. 若 $\omega=z^m dz$，$m\in\mathbb{Z}^+$.

注意到 $\varphi_1(\zeta),\cdots,\varphi_{n_1}(\zeta)$ 为多项式 $h(z,\zeta):=z^{n_1}-\zeta$ 的根.

当 $|\zeta|<<1$ 时，$|\varphi_j(\zeta)|<<1$. 取 $0<\delta<<\varepsilon<<1$，当 $|\zeta|<\delta$，计算留数

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n_1}\varphi_k(\zeta)^l&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\varepsilon}\frac{z^l\partial h(z,\zeta)/\partial z}{h(z,\zeta)}dz\\&=\frac{n_1}{2\pi i}\int_{|z|=\varepsilon}\frac{z^{l+n_1-1}}{z^{n_1}-\zeta}dz\\&=\frac{n_1}{2\pi i}\int_{|z|=\varepsilon}z^{l-1}\sum_{j=0}^{\infty}(\zeta/z^{n_1})^j dz\in\mathcal{O}_0.\end{aligned}$$

推出 $\sum\limits_{k=1}^{n_1}\varphi_k^*\omega=\sum\limits_{k=1}^{n_1}\varphi_k^m d\varphi_k=\frac{1}{m}d(\sum\limits_{k=1}^{n_1}\varphi_k^{m+1})$，可全纯沿拓过 $\zeta=0$，即 y_1.

对于一般的 ω，总可写有 Taylor 展开 $\omega=\sum\limits_{m=0}^{\infty}a_m z^m dz$，即得.

命题 2.6.3. $\Gamma=\mathbb{Z}\gamma_1+\mathbb{Z}\gamma_2\subset\mathbb{C}$ 为一个格，$P=\{t_1\gamma_1+t_2\gamma_2:t_1,t_2\in[0,1)\}$，$a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n\in P$.

存在 Γ-双周期函数以 a_j 为零点，b_j 为极点，等价于 $\sum\limits_{j=1}^{n}(a_j-b_j)\in\Gamma$.

证明. 记 $\pi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}/\Gamma$ 是自然投影. 记 $D=\pi a_1+\cdots+\pi a_n-\pi b_1-\cdots-\pi b_n$，则 $\deg D=0$. 记 $c_j=[a_j,b_j]$ 是连接 a_j,b_j 的线段.

令 $c:=\pi c_1+\cdots+\pi c_n\in C_1(\mathbb{C}/\Gamma)$ 使得 $\partial C=D$. 设 dz 诱导 $\omega\in\Omega(\mathbb{C}/\Gamma)$，则 $\int_c\omega=\sum\limits_k\int_{c_k}dz=\sum\limits_k(b_k-a_k)$，则 $\int_c\omega=0$ 等价于 $\sum\limits_k(b_k-a_k)\in\Gamma$，由 Abel 定理即证.

命题 2.6.4. *设 $\omega_1,\cdots,\omega_g$ 为 $\Omega(X)$ 的一组基，记 $c_1,\cdots,c_{2g}$ 为 $H_1(X)$ 的一组典范基. 作 $\gamma_j=\left(\int_{c_j}\omega_1,\cdots,\int_{c_j}\omega_g\right)\in\mathbb{C}^g$，$1\le j\le 2g$.*

可以证明，$\Gamma:=\mathbb{Z}\gamma_1+\cdots+\mathbb{Z}\gamma_{2g}\subset\mathbb{C}^g\cong\mathbb{R}^{2g}$ 为一个格，进而 $J(X):=\mathbb{C}^g/\Gamma$ 为一个 g 维环面，称其为 X 的 Abel 簇.

固定 $a\in X$，定义映射 $j_x:X\to J(X)$, $x\mapsto[(\int_a^x\omega_1,\cdots,\int_a^x\omega_g)]$，称为 Abel-Jacobi 映射.

当 $g\ge 1$ 时，j_x 为一个全纯嵌入.

3 非紧 Riemann 面

目标：证明下面的单值化定理.

定理 3.0.1. 单值化定理 *(Kobe 1907, Poincaré 1907)*

每个单连通 *Riemann* 面，双全纯同胚于 $\Delta, \mathbb{C}$ 或 $\mathbb{P}^1$.

证明方法：

1. PDE(解 Dirichlet 问题)； 2. 拓扑； 3. 复分析

动机：如何把一条代数曲线单参数化？

注 3.0.1. 高维不成立，如 $\mathbb{B}^2$ 不全纯同胚于 $\Delta\times\Delta$ *(Poincaré)*.

3.1 Dirichlet 问题

引理 3.1.1. X 是 *Riemann* 面，$G\subset X$ 单连通区域. 若 $u\in\mathscr{H}(G;\mathbb{R})$，则存在 $f\in\mathcal{O}(G)$ 使得 $u=\operatorname{Re} f$.

证明. 令 $\sigma=du$，则 $\sigma\in\mathscr{H}^1(G)$ 且 $\overline{\sigma}=\sigma$，故存在 $\omega\in\Omega(X)$ 使得 $\sigma=\operatorname{Re}\omega$.

取定 $a\in X$，定义 $f(x):=\int_a^x\omega$. 因为 G 单连通，所以积分与路径的选取无关，$f\in\mathcal{O}(G)$ 且 $df=\omega$.

$\sigma=\operatorname{Re}\omega$ 等价于 $du=\operatorname{Re} df=d\operatorname{Re} f$，故 $u=\operatorname{Re}(f+\text{常数})$.

命题 3.1.1. 最大值原理

设 $u\in\mathscr{H}(X)$ 不恒为常数，则 u 不能在 X 内部取最大值.

证明. 假设存在 $x_0\in X$ 使得 $u(x_0)=\max\limits_x u$，则 $S:=\{x\in X: u(x)=\max\limits_x u\}\subset X$ 是闭的.

同时 $S\subset X$ 是开的：设 $a\in S$，取 $G\ni a$ 单连通，则存在 $f\in\mathcal{O}(G)$ 使得 $\operatorname{Re} f=u$，进而 $|e^f|=e^u$. 由全纯函数最大模原理，e^f 是常数，进而 $u|_G$ 恒等于 u 的最大值，故 $G\subset S$，即 S 开.

S 是非空的既开又闭的集合，故 S 是全集 X.

命题 3.1.2. *Dirichlet* 问题

设 $Y\subset X$ 开，$f\in C(\partial Y,\mathbb{R})$，是否存在 $u\in C(\overline{Y})\cap\mathscr{H}(Y)$ 使得 $u|_{\partial Y}=f$.

命题 3.1.3. 若 $Y\subset\subset X$，则 *Dirichlet* 问题有唯一解.

证明. 若 u_1,u_2 均为 Dirichlet 问题的解，则 $u_1-u_2,u_2-u_1\in\mathscr{H}(Y)\cap C(\overline{Y})$，且在 ∂Y 取值为 0. 由最大值原理，u_1-u_2,u_2-u_1 在 Y 上均非正，故 $u_1\equiv u_2$.

定理 3.1.1. *Poisson*

$$u(z):=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-|z|^2}{|Re^{i\theta}-z|^2}f(Re^{i\theta})d\theta$$

为 $\Delta_R=\{|z|<R\}$ 上由 f 为边值的 *Dirichlet* 问题的解.

推论 3.1.1. $\{u_n\} \subset \mathscr{H}(\Delta_R)$，且 $u_n \xrightarrow{\text{内闭}} u$，则 $u \in \mathscr{H}(\Delta_R)$.

推论 3.1.2. *Hanarck* 定理

若 $\{u_n\} \subset \mathscr{H}(\Delta_R)$ 且单增且有上界 ($u_n \leq C$，C 是常数)，则 $u_n \xrightarrow{\text{内闭}} u$.

再进而由上一推论，$u \in \mathscr{H}(\Delta_R)$.

定义 3.1.1. X是 *Riemann* 面 ,$Y \subset X$ 开. 记 $\mathrm{Reg}\, Y := \{D \subset\subset Y\text{开} : D\text{上的 } \textit{Dirichlet} \text{ 问题可解}\}$. 坐标圆盘在 $\mathrm{Reg}\, Y$ 内 (*Poisson* 定理).

对于 $u \in C(Y, \mathbb{R})$，定义 $P_D u := \begin{cases} u, & Y \backslash D \\ \text{以}u|_{\partial D}\text{为边值的 } \textit{Dirichlet} \text{ 问题的解}, & D \end{cases}$. 则 $u \in \mathscr{H}(Y)$ 等价于 $P_D u = u, \forall D \in \mathrm{Reg}\, Y$.

定义 3.1.2. 称 $u \in C(Y, \mathbb{R})$ 次调和 (*subharmonic*)，若 $P_D u \geq u$，$\forall D \in \mathrm{Reg}\, Y$.

称 u 为局部次调和的，若 $\forall a \in Y$，存在邻域 $U \ni a$ 使得 u 在 U 上次调和.

记 $SH(Y) = \{Y\text{上的次调和函数}\}$，$SH(Y, loc) = \{Y\text{上的局部次调和函数}\}$.

命题 3.1.4. 最大值原理

$u \in SH(Y, loc)$，若存在 $x_0 \in Y$ 使得 $u(x_0) = \max\limits_Y u$，则 $u \equiv u(x_0)$.

证明. 令 $S := \{x \in Y : u(x) = u(x_0)\}$，则 $S \subset Y$ 闭. 假设 $S \neq Y$，则存在 $a \in Y \cap \partial S$. 因为 u 连续，所以 $u(a) = u(x_0)$. 取 $D \subset \mathrm{Reg}\, Y$ 使得 $a \in D$，$u \in SH(\overline{D})$ 且存在 $x \in \partial D$ 使得 $u(x) < u(x_0)$.

$u \leq P_D u =: v$. $v \in \mathscr{H}(D) \cap C(\overline{D})$ 且 $v|_{\partial D} = u \leq u(x_0)$，由调和函数的最大值原理，$v = P_D u \leq u(x_0)$ 于 D，但 $v(a) \geq u(a) = u(x_0)$. 由最大值原理，$v \equiv u(x_0)$. 因为 $v|_{\partial D} = u|_{\partial D}$，所以 $u|_{\partial D} \equiv u(x_0)$，矛盾.

推论 3.1.3. $u \in SH(Y)$ 等价于 $u \in SH(Y, loc)$.

证明. 只需考虑右推左. 设 $D \in \mathrm{Reg}\, Y$，$u \in SH(Y, loc)$，$v := u - P_D u \in SH(D, loc)$，且 $v|_{\partial D} = 0$. 由最大值原理，$v \leq 0$ 于 D, 即 $u \leq P_D u$ 于 D，故 $u \in SH(Y)$.

命题 3.1.5. 次调和函数的一些性质.

1. $u, v \in SH(Y)$，$\lambda, \mu \geq 0$，则 $\lambda u + \mu v \in SH(Y)$.

$$P_D(\lambda u + \mu v) = \lambda P_D(u) + \mu P_D(v) \geq \lambda u + \mu v.$$

2. $u, v \in SH(Y)$，则 $\max\{u, v\} \in SH(Y)$.

$$u \leq P_D u \leq P_D \max\{u, v\},$$

$$v \leq P_D v \leq P_D \max u, v.$$

3. $u \in SH(Y)$，则 $P_D u \in SH(Y)$.

证明. 性质 3 的证明. 令 $v = P_D u$，须证：$\forall D' \in \operatorname{Reg} Y$，$P_{D'} v \geq v$.

在 $Y \backslash D'$，$P_{D'} v = v$.

在 $Y \backslash D$，因为 $v \geq u$，由最大值原理，有 $P_{D'} v \geq P_{D'} u \geq u = v$.

因为 $(Y \backslash D') \cup (Y \backslash D) = Y \backslash (D \cap D')$ 且 $v - P_{D'} v \in \mathscr{H}(D \cap D')$ 且在 $\partial(D \cap D')$ 上非正. 所以由最大值原理，$v \leq P_{D'} v$ 于 $D \cap D'$.

引理 3.1.2. *Perron*

设 $\mathcal{F} \subset SH(Y)$ 非空，使得

1. *$u, v \in \mathcal{F}$，则 $\max\{u, v\} \in \mathcal{F}$.*

2. *$u \in \mathcal{F}$，$D \in \operatorname{Reg} Y$，则 $P_D u \in \mathcal{F}$.*

3. *存在 $C \in \mathbb{R}$，使得 $u \leq C$，$\forall u \in \mathcal{F}$.*

则 $u^*(x) := \sup\{u(x) : u \in \mathcal{F}\} \in \mathscr{H}(Y)$.

引理的证明. 设 $a \in Y$，取 $D \in RegY$ 为 a 的一个坐标邻域圆盘，目标：证明 $u^* \in \mathscr{H}(D)$.

取一列 $\{u_n\} \subset \mathcal{F}$ 使得 $u_n(a) \to u^*(a)(n \to \infty)$. 若用 $\max\{u_1, \cdots, u_{n-1}\}$ 代替 u_n，则不妨设 $u_1 \leq u_2 \leq \cdots (\leq C)$ 且 $u_n(a) \to u^*(a)$. 令 $v_n := P_D u_n$，则 $v_1 \leq v_2 \leq \cdots (\leq C)$. 由 Harnack 定理，$v_n \xrightarrow{\text{内闭}} v \in \mathscr{H}(D)$ 且 $v \leq u^*$ 且 $v(a) = u^*(a)$.

$v \leq u^*$：因为 $v_n \in \mathcal{F}$，所以 $v_n \leq u^*$ 进而 $v \leq u^*$.

$v(a) = u^*(a)$：$u^*(a) \geq v(a) \geq v_n(a) \geq u_n(a) \to u^*(a)$.

只需证明：$u^* = v$ 于 D.

设 $x \in D$，取 $\{w_n\} \subset \mathcal{F}$ 使得 $w_n(x) \to u^*(x)$. 利用 $\max\{w_1, \cdots, w_{n-1}, v_n\}$ 代替 w_n，可设 w_n 是单调增加的，且 $v_n \leq w_n (\leq C)$. 同样地，由 Harnack 定理，设 $P_D w_n$ 收敛到 $w \in \mathscr{H}(D)$，则 $v \leq w \leq u^*$，$w(x) = u^*(x)$.

$u^*(a) = v(a) \leq w(a) \leq u^*(a)$，则 $v(a) = w(a)$. 因为 $v - w$ 是 D 上非正的调和函数，又在内点 a 处取 0，故 $v \equiv w$ 于 D. $u^*(x) = w(x) = v(x), \forall x \in D$.

定义 3.1.3. 设 $f \in C(\partial Y, \mathbb{R})$ 使得 $\|f\|_\infty < \infty$. 记 $K := \sup\limits_{\partial Y} f (< \infty)$.

令 $\mathcal{P}_f := \{u \in C(\overline{Y}) \cap SH(Y) : u \leq K, u|_{\partial Y} \leq f\}$，称其为一个 *Perron* 族. $\mathcal{P}_f \neq \varnothing$，因为 $u = -\|f\|_\infty \in \mathcal{P}_f$.

且 *Perron* 族满足 *Perron* 引理条件，故 $u_f^*(x) := \sup\{u(x) : u \in \mathcal{P}_f\} \in \mathscr{H}(Y)$. 这样，若要解以 f 为边值的 *Dirichlet* 问题，只需证明 $u_f^*(x) \to f(x_0)$，若 $x \to x_0 \in \partial Y$.

定义 3.1.4. 称 $x \in \partial Y$ 为一个正则点，若存在邻域 $U \ni x$ 以及 $\beta \in SH(Y \cap U) \cap C(\overline{Y} \cap U)$，使得 $\beta(x) = 0$ 且 $\beta(y) < 0$，$\forall y \in \overline{Y} \cap (U \backslash \{x\})$. 称 β 为 x 处的一个障碍 *(barrier)*.

例子 3.1.1. 0 不是 Δ^* 的一个障碍.

若否，则存在 0 处的一个障碍 $\beta < 0$. 则 0 是 β 的可去奇点，与最大值原理矛盾.

引理 3.1.3. *设 $x \in \partial Y$ 是一个正则点，$V \ni x$ 是邻域，$m \leq c$，则存在 $v \in C(\overline{Y}, \mathbb{R}) \cap SH(Y)$ 使得*

(1). $v(x) = c$. (2). $v|_{\overline{Y} \cap V} \leq c$. (3). $v|_{\overline{Y} \backslash V} = m$.

证明. 不妨设 $c=0$，设 $U\ni x$ 及 $\beta\in C(\overline{Y}\cap U,\mathbb{R})$ 为 x 处的一个障碍. 不妨设 $V\subset\subset U$，则

$$\sup\{\beta(y):y\in\overline{Y}\cap\partial V\}<0.$$

则存在 $k>>1$，使得 $k\beta|_{\overline{Y}\cap\partial V}<0$.

取 $V:=\begin{cases}\max\{m,k\beta\}, & 于\overline{Y}\cap V\\ m, & 于\overline{Y}\backslash V.\end{cases}$，$V\in SH(Y\backslash V)$，$V\in SH(Y\backslash\overline{V})$.

另一方面, $V=m$ 于 $Y\cap\partial Y$ 的一个充分小邻域, 其在那里也次调和, 故 $V\in SH(Y)$.

定理 3.1.2. *Perron*

设 $Y\subset X$ 开, 使得任意 $x\in\partial Y$ 正则, 则相应于 ∂Y 上的有界的连续函数的 *Dirichlet* 问题可解.

证明. $\forall\varepsilon>0$，存在邻域 $V\ni x$ 使得

$$|f(y)-f(x)|<\varepsilon,\quad\forall y\in\partial Y\cap V,$$

设 $k\le f(y)\le K$ 于 ∂Y.

由引理 3.1.3，存在 $\nu\in SH(Y)\cap C(\overline{Y},\mathbb{R})$ 使得 $\begin{cases}\nu(x)=f(x)-\varepsilon\\ \nu|_{\overline{Y}\cap V}\le f(x)-\varepsilon\\ \nu|_{\overline{Y}\backslash V}=k-\varepsilon\end{cases}$，则 $\nu|_{\partial Y}\le f$.

进而推出 $\nu\in\mathcal{P}_f$，故 $\nu\le u_f^*$，故 $\varliminf\limits_{y\to x}u_f^*(y)\ge\nu(x)=f(x)-\varepsilon$.

同样，存在 $\omega\in SH(Y)\cap C(\overline{Y},\mathbb{R}$ 使得 $\begin{cases}\omega(x)=-f(x)\\ \omega|_{\overline{Y}\cap V}\le -f(x)\\ \omega|_{\overline{Y}\backslash V}=-K\end{cases}$，则对于任意 $\mu\in\mathcal{P}_f$，任意 $y\in\partial Y\cap V$，有 $\mu(y)\le f(y)<f(x)+\varepsilon\le-\omega(y)+\varepsilon$，进而 $(\mu+\omega)|_{\partial Y\cap V}\le\varepsilon$.

另一方面，$(\mu+\omega)|_{\overline{Y}\cap\partial V}\le K-K=0\le\varepsilon$.

因为 $\mu+\omega\in SH(Y\cap V)$，所以由最大值原理，$\mu+\omega\le\varepsilon$ 于 $Y\cap V$，$\forall\mu\in\mathcal{P}_f$. 故 $\varlimsup\limits_{y\to x}u_f^*(y)\le\varepsilon w(x)=f(x)+\varepsilon$.

例子 3.1.2. $Y\subsetneq\mathbb{C}$ 单连通，$a\in\partial Y$. 不妨设 $a=0$. 取 $\beta(z):=\mathrm{Re}(1/\log z)$ 于 $\overline{Y}\cap\Delta$.

因为 $\beta(z)=\mathrm{Re}\,\frac{\overline{\log z}}{|\log z|^2}=\frac{\log|z|}{|\log z|^2}\le 0$ 于 $\overline{Y}\cap\Delta$，且 $-\beta(z)=\frac{-\log|z|}{|\log z|^2}\le\frac{1}{-\log|z|}$，进而 β 为 $0\in\partial Y$ 处的一个障碍.

命题 3.1.6. X 是 *Riemann* 面，$Y\subset X$ 开，$x\in\partial Y$. 若存在邻域 $V\ni x$ 使得 $Y\cap V$ 单连通，则 x 为 Y 的正则点. 特别地，若 ∂Y 为 C^1 光滑的，则任意 $x\in\partial Y$ 是正则点.

注 3.1.1. $Y\subset\subset X$, ∂Y 分段光滑, 此时 *Dirichlet* 问题的解属于 *Riemann* 本人. *Riemann* 采用了下面的所谓 *Dirichlet* 原理:

设 $\mathscr{F}=\{u在\Omega内部分片C^2且u|_{\partial Y}=f,在\overline{\Omega}上分片C^1\}$，则使得能量积分 $\int_Y du\wedge *du=:D(u),u\in\mathscr{F}$ 达到最小值的 u_0 为 *Dirichlet* 问题的解.

$D(u,w):=\int_Y du\wedge *dw$，$t\in\mathbb{R}$，则 $D(u_0+tw)=D(u_0)+2tD(u_0,w)+t^2D(w)$，推出 $\int_Y\Delta u_0\cdot w=D(u_0,w)=0,\forall w$，故 $\Delta u_0=0$.（变分法）

Weierstrass 提出了严厉的批评：一个变分问题一般情形下最小值不一定达到！

但在 *1900* 年左右，*Hilbert* 给出了 *Dirichlet* 原理的正确叙述，从而挽救了 *Dirichlet* 原理.

3.2 可数拓扑

3.3 单值化定理